1 Mathématiques

1.1 Remarques générales et conseils

Nous incitons les candidats à apprendre leur cours de mathématiques de première et de deuxième année en profondeur, de manière à maîtriser les notions et les théorèmes du programme. Nous leur conseillons également de s'entraîner intensivement au calcul, en particulier à la manipulation des inégalités.

Plusieurs erreurs relevées l'an dernier ont été commises de nouveau cette année.

Une **présentation soignée** (écriture nette, absence de ratures, résultats encadrés) dispose très favorablement le correcteur. Les correcteurs ont été étonnés par le manque de soin, beaucoup de copies ressemblent plus à un brouillon qu'à une épreuve de concours.

Les encres pâles sont encore fréquentes, et un nombre croissant de candidats a obligé les correcteurs à utiliser la loupe tant leur écriture est minuscule.

On recommande aux candidats d'employer une encre foncée, restant bien visible après numérisation. Le texte et les calculs sont souvent agrémentés de petites zones de texte coloré insérées avec des flèches par des candidats ne prenant pas la peine de rédiger une phrase pour justifier une assertion ou une expression.

Il est demandé de numéroter les copies de façon cohérente, les correcteurs n'aimant pas être confrontés à un jeu de piste.

Il est fortement conseillé d'aborder et de rédiger les questions dans l'ordre de l'énoncé.

On recommande de bien traiter une partie des questions plutôt que de produire un discours inconsistant pour chacune d'entre elles. Certaines copies obtiennent une note très faible en prétendant répondre à la quasi-totalité des questions. Nous rappelons que les questions « faciles » doivent être correctement rédigées pour être complètement prises en compte, surtout en début de problème.

La rédaction est un élément essentiel d'appréciation. Elle est en fait difficilement dissociable du fond. On attend notamment des candidats la vérification de l'existence des objets manipulés, une déclaration claire des objets utilisés, un maniement soigneux des inégalités (notamment distinction entre inégalité large et inégalité stricte). Chaque théorème utilisé doit être clairement et complètement énoncé.

La rédaction des preuves doit être courte et complète ; tous les arguments sont attendus.

Les tentatives de bluff n'apportent aucun point et préviennent très défavorablement le correcteur quant à l'ensemble de la copie.

Nous suggérons également aux candidats de se relire, de manière à éviter de laisser subsister dans leur travail des absurdités criantes (par exemple, des inégalités entre nombres complexes).

Nous soulignons également l'importance d'une lecture rigoureuse de l'énoncé, qui guide la réflexion et permet d'éviter certaines erreurs.

Les copies doivent être rédigées en Français. Les paragraphes doivent commencer à gauche de la page et non au milieu, les phrases doivent commencer par une majuscule et se terminer par un point. Quant aux connecteurs logiques $\Leftrightarrow$ et $\Rightarrow$, ce ne sont pas des marques d'inférence et ils ne doivent donc pas remplacer « donc », « ainsi », « c'est pourquoi », etc.

Les abréviations sont pléthore, au point de rendre la lecture parfois difficile en raison de l'ambiguïté qui peut en résulter : comment savoir que ISMQ signifie « il suffit de montrer que » ?

L'orthographe et la syntaxe sont souvent défectueuses ; des démonstrations par l'absurde se terminent par « donc impossible ».

Trop régulièrement les candidats redéfinissent sur leur copie les objets déjà définis par l'énoncé (par exemple ils écrivent « Soit $A = \dots$ » à la première question). Inversement, trop de candidats ne

Téléchargé gratuitement sur Doc-Solus.fr

prennent pas la peine d'introduire leurs propres notations.

Beaucoup de symboles mathématiques sont utilisés comme abréviations, et certains candidats utilisent des abréviations surprenantes (dc, sq, dz, sars, ...) potentiellement inconnues du correcteur. Attention aux notations non définies dans le programme et potentiellement ambigües : par exemple, utiliser $\sim$ pour désigner la similitude entre matrices est porteur de confusion avec l'équivalence entre matrices, et la signification de cette notation doit donc être précisée dans la copie dès sa première utilisation.

Téléchargé gratuitement sur Doc-Solus.fr

1.5 Mathématiques 2 - filière PC

1.5.1 Généralités et présentation du sujet

Le sujet portait sur l'étude des séries congruo-harmoniques, avec des calculs sur leurs sommes et une estimation de leur vitesse de convergence dans la partie finale.
La difficulté était progressive, avec des questions très proches du cours et d'autres qui demandaient plus d'autonomie sur les calculs et raisonnements.
Au fil des cinq parties, on croisait plusieurs thèmes classiques du programme de PCSI/PC. On y trouvait ainsi des séries numériques, des intégrales sur un segment, des intégrales à paramètre, des nombres complexes, de l'analyse asymptotique et des probabilités discrètes. D'autres thèmes, qui sont moins au coeur du programme de la filière, comme la décomposition en éléments simples, ont été moins abordés par les candidats. Cependant, la diversité des notions manipulées leur a permis de ne pas rester bloqués sur des questions qui les inspiraient moins, et de montrer leurs connaissances et compétences issues de nombreux chapitres vus au cours de leur formation.

Une analyse détaillée des questions est présentée dans l'annexe D.

1.5.2 Conseils aux candidats

Afin d'aider les candidats des futures sessions à obtenir les meilleurs résultats possibles, voici quelques conseils :

- Bien connaître son cours (les hypothèses précises des théorèmes et les définitions des notions du programme sont bien souvent les clés pour obtenir les points de nombreuses questions ainsi qu'une note tout à fait satisfaisante)
- Lire l'intégralité du sujet au début de l'épreuve pour repérer sa longueur, les différentes parties, leur articulation et leurs thèmes respectifs, afin de mieux organiser son temps de composition.
- Éviter toute tentative de « bluff » car elle sera immédiatement sanctionnée et ne pourra qu'irriter le correcteur et le mener à arbitrer défavorablement les questionnements qui pourraient apparaître dans la suite de la copie.
- Utiliser un brouillon pour les calculs les plus délicats et ne recopier que les étapes principales, en les justifiant soigneusement, plutôt que d'écrire des successions d'égalités parfois peu lisibles et souvent raturées. Une rédaction efficace et argumentée est plus souvent à l'origine de la totalité des points qu'une déambulation longue et absconse.
- Chercher la simplicité. Ainsi, il est préférable d'éviter d'utiliser de lourds théorèmes d'interversion, souvent sources de temps perdu et d'erreurs, pour montrer qu'une intégrale tend vers zéro lorsqu'une simple majoration suffit, ou pour intervertir somme finie et intégrale.

Enfin, le jury souhaite bonne chance aux futurs candidats.

1.6 Mathématiques 1 - filière PSI

1.6.1 Généralités et présentation du sujet

Le but du problème est d'étudier des conditions pour qu'une matrice A soit semblable à son inverse et de démontrer en particulier le résultat suivant :

Téléchargé gratuitement sur Doc-Solus.fr

Une matrice carrée est semblable à son inverse si et seulement si elle est produit de deux matrices de symétrie.

Le problème débute par des considérations sur les polynômes réciproques, $i.e$ tels que

$$P(X) = X^{deg(P)} P(\frac{1}{X}),$$

et antiréciproques (partie 1) dont on obtient une caractérisation en termes de racines. Dans la partie 2 on montre l'implication :

$$A \text{ est semblable à son inverse} \Rightarrow \chi_A \text{ est réciproque ou antiréciproque}$$

avant de prouver à l'aide des résultats de la partie 1 l'implication inverse dans le cas où A est diagonalisable, puis de montrer qu'elle n'est pas vraie en général via l'étude d'un contre-exemple.

La suite du problème est consacrée à la preuve du résultat principal. On prouve en question 10 le sens "facile" : un produit de deux matrices de symétrie est semblable à son inverse. Le sens difficile sera prouvé en question 21 à l'aide de la décomposition en blocs de Jordan (admise dans l'énoncé). Cette preuve est basée sur un raisonnement par blocs s'appuyant sur trois résultats intermédiaires :

-la matrice de Jordan $J_n(\lambda)$ (pour $\lambda \neq 0$) est semblable à son inverse (questions 14 à 16).

-une matrice diagonale par blocs $\begin{pmatrix} B & 0_n \\ 0_n & C \end{pmatrix}$ dont les blocs $B, C \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ sont tels que C est semblable à B^{-1} peut s'écrire comme produit de deux matrices de symétrie (questions 12 et 13).

-dans le cas où $\lambda \in \{-1, 1\}$ la matrice de Jordan $J_n(\lambda)$ est produit de deux matrices de symétrie (questions 17 à 19). La preuve repose sur le fait que $J_n(1)$ représente dans une base bien choisie l'endomorphisme de $\mathbf{C}_{n-1}[X]$ défini par $P \mapsto P(X+1)$ que l'on peut décomposer sous la forme $s_1 \circ s_2$ où s_1 et s_2 sont les symétries $P \mapsto P(-X)$ et $P \mapsto P(1-X)$.

Une analyse détaillée des questions est présentée dans l'annexe E.

1.6.2 Thématiques abordées et généralités sur les copies

Le sujet était de longueur et de difficulté technique raisonnables mais nécessitait une bonne maîtrise du cours d'algèbre (générale et linéaire). Il a permis de récompenser les candidats possédant des connaissances solides et une bonne pratique dans ces domaines et de mettre en valeur quelques excellentes copies où la démarche générale du problème a été bien comprise et la dernière partie abordée.

La partie 1 a révélé une maitrise inégale de la notion de multiplicité d'une racine d'un polynôme et a déjà opéré un premier tri entre les copies. Dans la partie 2 le maniement du polynôme caractéristique a été plutôt satisfaisant mais les calculs concrets d'éléments propres à la question 9 ont mis en exergue les lacunes de certains candidats en calcul. La partie 3 a montré chez un nombre non négligeable de candidats des confusions entre matrice de symétrie (notion pourtant redéfinie dans l'énoncé) et matrice symétrique.

En partie 4 la manipulation des matrices nilpotentes a présenté des difficultés pour un nombre significatif de candidats ; en fin de partie le calcul de $s_1 \circ s_2$ s'est avéré délicat et on a pu également noter des erreurs d'homogénéité (confusion entre s_1^2 et $s_1^2(P)$ par exemple) qui révèlent un manque de rigueur chez un nombre substantiel de candidats. Les questions 14 et 17 ont finalement permis de classer efficacement les copies. Enfin les tout meilleurs candidats ont pu montrer leur compréhension approfondie du sujet sur les questions 19 et 20, la 21 n'étant pratiquement jamais abordée.

Pour terminer signalons que le jury déplore une dégradation de la rédaction et de la présentation des copies. Trop de candidats présentent des suites d'aguments d'où une structure peine à émerger en

Téléchargé gratuitement sur Doc-Solus.fr

semblant laisser le soin au correcteur de faire le tri. Rappelons quelques conseils simples qui favorisent l'appréciation des copies : souligner ou encadrer les résultats, aérer la présentation (passages à la ligne, espaces, tirets...), annoncer sa démarche au début d'un raisonnement et citer clairement les résultats du cours utilisés ainsi que leurs hypothèses.

1.7 Mathématiques 2 - filière PSI

1.7.1 Présentation générale et intérêt scientifique du sujet

Le sujet étudiait un modèle probabiliste de propagation d'épidémie de type SIR (Sains-Infectés-Rétablis). Ce modèle prend la forme d'un système différentiel autonome, dont l'étude d'une condition initiale particulière se réduisait à celle de l'équation différentielle non linéaire

$$u'(x) + u(x) + 1 = \frac{e^{u(x)}}{2}\cdot$$

Ce type d'équation différentielle – qu'il s'agisse des systèmes différentiels autonomes ou des équations différentielles scalaires non linéaires – ne figure pas au programme de la filière PSI, et aucune connaissance spécifique n'était nécessaire ni utile pour traiter convenablement les différentes parties du sujet.

1.7.2 Structure du sujet

Le sujet comprenait de nombreuses parties permettant d'évaluer la maîtrise de techniques variées enseignées en première comme en deuxième année. La première partie évaluait les connaissances sur les équations différentielles linéaires à coefficients constants, ainsi que diverses techniques générales d'analyse. La deuxième partie faisait la part belle aux séries de fonctions et nécessitait une bonne maîtrise du cours de deuxième année (justification de la convergence d'une série, convergence normale, dérivation terme à terme d'une série de fonctions). La partie III demandait d'avoir bien identifié les résultats obtenus dans la partie précédente. La partie IV reposait sur une majoration explicite assez élémentaire, suivie de la reconnaissance d'un système de Vandermonde. La partie V reposait sur la résolution successive d'équations différentielles élémentaires ainsi que d'identités obtenues par dérivation-intégration, à l'exception de sa dernière question (qui reposait sur une technique de majoration). La dernière partie évaluait enfin la maîtrise des techniques en probabilités, notamment via des calculs d'espérance conditionnelle (à nouveau, sans que des connaissances spécifiques sur cette notion hors-programme ne soient nécessaires au bon traitement des questions posées).

Remarques générales sur la présentation et la rédaction

Le jury déplore à nouveau que la présentation des copies soit parfois peu soigneuse, mais ce point est en progrès depuis les précédentes éditions. L'orthographe est en revanche de plus en plus négligée. La rigueur est trop régulièrement absente dans le discours sur les objets : confusions innombrables entre la fonction f et la valeur $f(x)$, usage de la notation $f(x)'$ dénuée de sens, absence de quantification des propositions mathématiques.

À ce titre, la partie sur les équations différentielles a été particulièrement pénible à lire pour le jury de correction : la logique manque souvent de rigueur, avec notamment des confusions régulières entre l'inconnue de l'équation et les solutions, un flou assez important sur ce qui est supposé dans les raisonnements (bien des candidats supposent que l'équation est vérifiée par la fonction u qu'ils manipulent sans prendre la peine d'expliciter cette hypothèse), on déplore beaucoup d'oublis de réciproques lorsqu'elles sont indispensables, et enfin l'ordre de quantification des propositions est parfois

Téléchargé gratuitement sur Doc-Solus.fr

E Mathématiques 1 PSI

Q1 - Question presque toujours bien traitée, avec quelques longueurs parfois.

Q2 - Pour la non nullité des racines, l'argument $a_0 = a_p \neq 0$ a été assez rarement vu. La factorisation $P = a_p \prod_{i=1}^{d}(1 - \lambda_i X)^{m_i}$ a souvent posé problème, la plupart du temps à cause d'une mauvaise distribution du facteur X^p dans le produit. Les candidats l'ayant obtenue ont généralement réussi à conclure à la non nullité des λ_i par un argument de degré. D'une manière générale cette question a révélé des problèmes de logique chez un certain nombre de candidats.

Q3 - Des maladresse pour montrer que 1 est racine de Q (utilisation de l'expression développée).

Q4 - Beaucoup de raisonnements sont incorrects car basés sur une factorisation de P ne prenant pas en compte la spécificité des racines 1 et -1 (les seules pour lesquelles $a = 1/a$). A noter qu'un nombre significatif de candidats a mal interprété l'indication et cherché à démontrer que -1 et 1 sont les seules racines possibles.

Q5 - Une question traitée correctement sur un nombre assez restreint de copies.

Q6 - Question bien traitée la plupart du temps.

Q7 - C'est une conséquence de la 6 ; encore fallait-il ne pas oublier de justifier qu'ici $\chi_A = \chi_{A^{-1}}$.

Q8 - L'inversibilité de B a souvent été prouvée, parfois de manière laborieuse ; par contre la seconde partie de la question n'a été que rarement traitée avec succès.

Q9 - On pouvait calculer B^{-1} ou bien remarquer que $B^{-1}X = 2X \Leftrightarrow BX = \frac{1}{2}X$. Les arguments pour montrer que B et B^{-1} ne sont pas semblables étaient incorrects dans une large majorité des copies. On pouvait par exemple conclure en remarquant que le rang est un invariant de similitude.

Q10 - Question souvent abordée mais traitée avec un succès inégal. Notons quelques erreurs fréquentes : affirmer que A est de déterminant 1 ou bien qu'elle est une matrice de symétrie.

Q11 - 'énoncé de la question a été la plupart du temps mal compris.

Q12 - Question globalement bien traitée ; le calcul par blocs est maitrisé dans la plupart des copies.

Q13 - Question qui s'est avérée sélective. Peu de candidats expliquent bien à quelles matrices P et Q on applique la question 12.

Q14 - Question classique : il s'agit de construire une base de la forme $(g^{n-1}(x_0), \ldots, g(x_0), x_0)$. Le choix du vecteur x_0 est assez souvent mal expliqué ; un certain nombre de candidats ordonnent la base dans le mauvais sens, ce qui ne conduit pas à la bonne matrice.

Q15 - Peu de bonnes réponses pour le calcul de l'inverse. La formule de Bernoulli est rarement invoquée.

Q16 - Question très rarement traitée correctement.

Q17 - Le calcul de s_1^2 et s_2^2 est le plus souvent correct ; le calcul de $s_1 \circ s_2$ a posé davantage de problèmes.

Q18 - Un grand nombre de candidats montrent que $deg(g(P)) \leq deg(P) - 1$ mais bien peu justifient l'égalité.

Q19 - Question abordée uniquement dans les très bonnes copies où elle a été en général bien traitée.

Q20 - Question reposant sur la 16 et un calcul par blocs. Assez peu abordée mais bien traitée dans les copies concernées.

Q21 - Question nécessitant la synthèse de plusieurs résultats antérieurs ; pratiquement jamais abordée, ce qui est assez logique compte-tenu de la durée de l'épreuve.

RETOUR

Téléchargé gratuitement sur Doc-Solus.fr