Commentaires généraux

Tout d'abord, répétons comme tous les ans les mêmes remarques générales que trop de candidats ne semblent pas respecter :

— Les correcteurs ont signalé à de nombreuses reprises un nombre important de copies mal ordonnées, mal présentées, raturées, voire illisibles par endroits (la rédaction de la copie ne doit pas occasionner un jeu de piste pour l'examinateur) : **les étudiants doivent s'appliquer à présenter une copie claire et propre**.

Il est rappelé que les copies doivent être correctement numérotées, dans un ordre cohérent. Nous avons même rencontré cette année des candidats qui utilisent leur propre numérotation différente de celle de l'énoncé...

Les copies quasiment illisibles sont lourdement pénalisées.

Enfin, l'orthographe fantaisiste donne une très mauvaise impression à la lecture de la copie.

Nous insistons sur ces points qui défavorisent à coup sûr le candidat, même s'il n'y a pas dans le barème de points de présentation : le correcteur regarde la copie d'un œil moins bienveillant dans ce cas.

— Trop de candidats utilisent des abréviations utilisées par leurs professeurs mais qui n'ont pas toujours de sens pour le correcteur : il vaut mieux les éviter.

— De même, il est préférable de ne pas écorcher le nom et l'orthographe des théorèmes cités : on voit par exemple trop souvent « le théorème spectrale » etc.

— Il semble judicieux d'éviter d'utiliser des expressions telles que « il est trivial que », « par une récurrence immédiate », « il est clair que » « forcément » etc... qui indisposent le correcteur : toute proposition énoncée dans une copie se doit d'être démontrée.

— De la même façon, les examinateurs ne goûtent guère des arguments inventés ou fallacieux pour arriver à toute force au résultat annoncé dans l'énoncé : la donnée d'un tel résultat permet en général de poursuivre la résolution de l'exercice sans avoir pu le démontrer : nous apprécions le candidat qui admet clairement le résultat en question pour continuer.

— Nous conseillons fortement aux candidats de prendre le temps de se relire car cela permet souvent d'éviter des erreurs basiques : par exemple, dans un développement limité, les deux termes de l'égalité ne tendent pas vers la même limite, etc...

— Enfin, un exemple même s'il permet souvent d'aider dans la perception du problème, ne permet pas de démontrer un résultat général.

Cette année, nous avons choisi de poser uniquement trois exercices, le deuxième permettant de déterminer les extrema d'une fonction à plusieurs variable à l'aide de la diagonalisation d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

— Rappelons qu'une lecture attentive de la totalité de chaque exercice du sujet permet souvent de comprendre l'architecture et la démarche proposée.

- — Un trop grand nombre d'étudiants ne maîtrise pas les notions de base d'algèbre linéaire, même de première année, ainsi que les théorèmes principaux d'analyse du programme de deuxième année de PSI et espèrent cependant venir à bout des questions posées en utilisant des recettes toutes faites bien souvent mal comprises.
- — Nous constatons de nouveau une très grande maladresse dans les calculs (parfois très simples) qui sont trop rapidement abandonnés :
  * Les opérations sur les puissances posent encore beaucoup de problème à nombre de candidats.
  * On trouve encore trop d'équivalents à 0...
- — Les quantificateurs, les symboles $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$ sont trop souvent malmenés, voire oubliés lorsqu'ils sont fondamentaux.

Conclusion : Nous souhaitons obtenir dans la résolution des exercices proposés **de la rigueur**, **une rédaction claire et lisible** et **une justification des résultats en utilisant à bon escient le cours** : ainsi, nous encourageons les candidats à rédiger le plus proprement, correctement et rigoureusement possible leurs copies, en détaillant clairement les calculs effectués et les théorèmes utilisés à chaque étape de la résolution, sans forcément chercher à tout traiter de façon superficielle.
Nous essayons de construire nos exercices de façon très progressive, seules les dernières questions étant parfois plus difficiles et sommes donc surpris lorsque des candidats négligent totalement un exercice.
Nous rappelons enfin qu'il vaut mieux admettre clairement le résultat d'une question et avancer dans la résolution du reste de l'exercice plutôt que de donner des arguments faux qui indisposent nécessairement le correcteur.
Nous proposons cette année dans ce rapport une correction succincte du sujet afin d'inciter les candidats à l'étudier attentivement en reprenant « à la main » les parties parfois rapidement rédigées.

Commentaires par exercice

Exercice 1

Exercice d'analyse mettant en jeu certains théorèmes du programme de deuxième année.

- — Dans la première question, le résultat est souvent énoncé sans aucune justification. Lorsqu'il y en a, ça n'est pas une franche réussite : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x) = 0$ et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n(x)$ converge !
- — Certains candidats croient reconnaître une série géométrique, d'autres une série de Riemann !
- — L'énoncé demandait de déterminer l'ensemble des x pour lesquels la série converge : après avoir démontré correctement que la série convergeait pour les $x > 0$, il ne fallait pas oublier d'étudier le cas $x \leqslant 0$.
- — Certains autres candidats tentent d'utiliser la règle de d'Alembert mais oublient que c'est la limite du quotient qu'il faut comparer à 1 et non le quotient.

- Pour montrer que f est décroissante, trop d'étudiants comparent $f(x)$ et $f(x+1)$. Très peu de copies évoquent les sommes partielles.
- Plutôt que de démontrer la convergence normale sur $[1,+\infty[$ beaucoup de candidats démontrent la convergence normale sur tout segment de cet intervalle.
- Certains candidats trouvent sans être choqués que $\|u_n\|_\infty = 0$.
- Le théorème de la double limite est souvent vu. Cependant, il est important de mentionner la convergence uniforme sur $[1,\infty[$ et non de dire « il y a convergence uniforme ».
- Le théorème d'intégration termes à termes semble totalement inconnu et pour ceux qui le connaissent, ses hypothèses restent très vagues.

Exercice 2

Exercice qui mélange de l'algèbre linéaire et des fonctions à plusieurs variables.

- La première question demande une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$: le bon résultat est très très rarement obtenu. Seules 10% des copies donnent le bon résultat !
- Écrire « l'ensemble de départ est le même que celui d'arrivée » sans aucune justification ne suffit pas pour conclure que f est un endomorphisme.
- De même, chercher l'image du polynôme nul ne prouve pas grand chose.
- Trop de candidats ont traités les questions **2.3.** et **2.4.** dans le cas $n = 3$.
- Une matrice triangulaire n'est pas forcément diagonalisable.
- On voit apparaître un nouveau théorème spectral : « toute matrice symétrique dont les coefficients sont positifs est diagonalisable »
- Des transitions étonnantes : $f(H_p) = -4\deg(H_p)\,H_p \Longrightarrow f(H_p') = -4\deg(H_p')\,H_p'$!
- Rappelons que le polynôme nul n'est pas unitaire.
- A partir de la deuxième relation obtenue à la question **3.2.**, certains candidats reconnaissent une suite récurrence linéaire double et en déduisent H_p après avoir posé une équation caractéristique.
- La dérivée des fonctions $\ln|x-y|$ pose problème, mais comme la solution est donnée, tout le monde y arrive...
- Comment des candidats peuvent se tromper à la question **4.2.1** ? Nous ne comprenons pas !
- La question **4.2.2.** a été celle où les candidats ont le plus bluffé : à partir de résultats faux, on arrive à la bonne conclusion, calculs inextricables qui donnent le bon résultat...confusion entre implication et équivalence.

Exercice 3

Exercice d'algèbre linéaire classique qui débouche sur la résolution d'un système différentiel pour $n = 3$.

- Question 1. Quelques réponses fantaisistes, du style : $J^2 = 2J$... Bien que correcte, l'égalité $J^2 = J \times J$ n'était pas la réponse attendue.

— Question 2. Beaucoup de candidats ne justifient pas leur propos. Le cas $\ell = 0$ est rarement mentionné. Parfois, on prétend qu'une récurrence immédiate permet de montrer un résultat qui est en fait faux. Comme en philosophie, on ne peut pas faire d'un exemple une généralité : les relations $J^2 = nJ$ et $J^3 = n^2 J$ ne suffisent pas à conclure que $J^\ell = n^{\ell-1} J$ pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$. Lorsque la conjecture a été prouvée par récurrence, l'ensemble annoncé dans la conclusion de la démonstration par récurrence n'est pas toujours cohérent avec le rang auquel a été faite l'initialisation. Les "récurrences immédiates" sont plus fréquentes dans les mauvaises copies et dans les plus courtes.

— Question 3. Le rang donné est parfois surprenant, rarement justifié. Dire que les colonnes sont égales ne suffit pas pour conclure que le rang vaut 1.

— Question 4. Si certains donnent une famille génératrice du noyau, beaucoup oublient de justifier la liberté. Le théorème du rang est souvent utilisé pour déterminer la dimension de $\mathrm{Ker}(J)$, et il semble moins maltraité que les années précédentes dans sa version matricielle.

La détermination d'une base du noyau reste cependant souvent problématique.

— Questions 5 et 11. La question donne parfois lieu à d'interminables calculs faux... la réponse tient en une ligne. Lorsque l'utilisation du théorème spectral a été repérée, on peut se réjouir de la présence presque systématique cette année du mot "réelle", mais se désoler du rajout du mot "positive" ! On lit parfois que le polynôme $\chi_J = X^{n-1}(X - n)$ est scindé à racines simples.

— Question 6. Certains candidats calculent le polynôme caractéristique alors que le sujet fait tout pour l'éviter. Les calculs sont souvent malhonnêtes.

Trop peu de candidats utilisent les questions précédentes pour déterminer les valeurs propres et tentent de calculer le polynôme caractéristique, sans succès, ce qui fait apparaître des valeurs propres loufoques, sans lien avec les questions précédentes (en particulier avec le rang de J).

— Question 7. Certains se trompent alors qu'ils ont les bonnes valeurs propres.

— Question 8. Question qui a souvent été source de confusions. Il est faux de prétendre que $\mathrm{Ker}(J) \cap \mathrm{Im}(J) = \varnothing$. Calculer le produit scalaire de $(1, \dots, 1)$ avec un seul des vecteurs de la base de $\mathrm{Ker}(J)$ ne suffit pas à conclure que $\mathrm{Im}(J) \perp \mathrm{Ker}(J)$.

— Question 9. Assez bien traitée. On peut se poser des questions lorsque la question 9 n'est pas traitée mais que la question 10 commence par $M_r^k = (rJ + (1 - r)\mathrm{I}_n)^k$: il est inconcevable que la notation Vect engendre une difficulté !

— Question 10. La formule est souvent maltraitée, notamment l'oubli du coefficient binomial, la somme partant de 1, oubli de dire que les matrices commutent. Les candidats seraient inspirés d'apprendre le cours plutôt que de faire d'improbables tours de magie... Le fait que l'exposant soit la lettre k a perturbé beaucoup de candidats (qui doivent avoir l'habitude d'indexer par k la formule du binôme de Newton) : plutôt que raturer quasiment tous les exposants de la somme, mieux vaut barrer proprement et réécrire correctement son calcul.

— Questions 13.2 et 13.3. Les quantificateurs sont presque toujours absents.

Luc Valette