3. Mathématiques 2

3.1. Introduction

Le sujet proposé porte sur l'attribution d'une valeur à des séries divergentes, en particulier l'attribution de la valeur $-\dfrac{1}{12}$ à la somme infinie $1+2+\cdots+n+\cdots$, théorisée pour la première fois par Srinivasa Ramanujan en 1913. Il balaye plusieurs chapitres du programme d'analyse : séries de fonctions, intégration, séries entières, ainsi que les espaces vectoriels normés.

La première partie fait apparaître la valeur $-\dfrac{1}{12}$ dans le développement asymptotique en 0 de deux sommes de séries de fonctions : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{A}{x^2} - \frac{1}{12} + o(1)$, le terme général de chacune de ces séries vérifiant $f_n(x) \xrightarrow[x\to 0]{} n$.

La seconde partie s'intéresse au traitement des sommes de séries divergentes à la façon de Ramanujan en s'appuyant sur la formule d'Euler-Maclaurin, démontrée dans un premier temps, qui permet d'obtenir un développement asymptotique de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k)$ en la comparant à $\displaystyle\int_1^n f(t)\mathrm{d}t$. Cette partie se conclut sur les valeurs des sommes, au sens de Ramanujan, de $\sum 1$, $\sum n$ et et $\sum k^2$.

Enfin, la dernière partie introduit la notion de développements tayloriens généralisés pour établit la formule d'Euler-Boole qui permet cette fois-ci d'obtenir un développement de la somme alternée $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}f(k)$.

3.2. Analyse globale des résultats

Le sujet est assez long et technique. La grande majorité des questions demandent aux candidats de démontrer des résultats fournis dans l'énoncé. Ce type de question requiert de la rigueur dans la justification de toutes les étapes du raisonnement et dans l'utilisation de questions antérieures, ce qui a fait défaut à un grand nombre de candidats. Trop nombreux sont les raccourcis dans les calculs, parfois assez malhonnêtes intellectuellement, les résultats sortis de nulle part et les suites de calculs sans aucune explication.

Le sujet est long (moins d'1 % des candidats ont pu dépasser la moitié des points mis en jeu dans le barème total). Pour obtenir une bonne note, traiter de façon exhaustive et rigoureuse une quantité raisonnable de questions est plus judicieux que de se précipiter en voulant traiter à la va-vite le plus de questions possible et en laissant au correcteur le loisir de deviner les détails du raisonnement et la provenance des résultats. La note médiane de l'épreuve correspond à une dizaine de questions traitées correctement et le troisième quartile à une douzaine.

Le jury rappelle également aux candidats de rendre des copies soignées. Il est approprié d'utiliser une règle pour mettre en valeur ses résultats ou barrer des passages de la copie qui se sont avérés faux. Les ratures sous forme de gribouillages, l'abus d'abréviations, de sigles plus ou moins baroques, l'absence de phrases ou de considérations pour la grammaire française sont autant de raisons pour les correcteurs d'appliquer des malus à la note finale, tout en réduisant leur bienveillance lors de l'évaluation des questions.

3.3. Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux candidats

3.3.1. Partie A

Q1 De nombreux candidats passent un temps significatif à établir l'ensemble de définition (en général par un $o(1/n^2)$ pour $x > 0$, et une divergence grossière pour $x \leq 0$), avec une rigueur logique parfois insuffisante (justifier que la série converge si $x > 0$ ne dit rien de ce qui se passe pour $x \leq 0$). Il suffisait simplement d'utiliser le critère de convergence des séries géométriques qui permettait de conclure très rapidement. Trop de candidats affirment que $\sum q^n$ converge pour $q < 1$, au lieu de $|q| < 1$.

Q2 Cette question pouvait se traiter rapidement à l'aide de l'expression de $f(x)$ obtenue à la question précédente sans passer par un théorème de dérivation de série de fonctions. Beaucoup d'erreurs de signe pour la valeur de $f'(x)$.

Q3 Les calculs de développements limités sont un peu techniques ici, mais les résultats ont été particulièrement catastrophiques. Les candidats ont rarement eu des considérations pour le o du dénominateur. La maîtrise des développements limités est encore alarmante cette année. Seuls 5 % des candidats ont pris tous les points à cette question.

Q4 Le jury tient à souligner que la réponse à cette question pouvait se deviner facilement si l'on prend le temps de lire l'en-tête de l'énoncé : « Dans la première partie sont présentées deux situations qui dans les deux cas font apparaître la valeur $-\dfrac{1}{12}$ ». Trop rares sont les candidats qui ont au moins souligné que la valeur qu'ils obtenaient n'était pas en accord avec ce résultat. Beaucoup de candidats concluent sur une limite infinie, à cause d'un développement faux obtenu à la question précédente.

Cette question permettait aussi d'évaluer la maîtrise du théorème de dérivation des séries de fonctions. Trop souvent, la dérivation terme à terme a été effectuée sans sourciller, ou avec une mauvaise maîtrise du théorème (régulièrement convergence uniforme de $\sum f_n$ au lieu de $\sum f_n'$), la convergence normale n'est pas bien maîtrisée et la convergence uniforme sur tout segment équivaut trop souvent à la convergence uniforme sur tout l'intervalle.

Q5 Cette question a mis en exergue le manque de rigueur logique et rédactionnelle d'une large partie des candidats. Des « il faut que » permettent d'obtenir des égalités d'ensembles (alors qu'en toute rigueur, ils ne justifient qu'une inclusion), les sens des inégalités sont conservés par division par x sans aucune justification sur le signe de x, l'apparition des parties entières (qu'on peut deviner par les questions suivantes) est rarement expliquée et certains candidats se contentent de vérifier uniquement les cas extrêmes.

Q6 Là encore, trop de manipulations d'inégalités sont effectuées sans justifications. Les manipulations de valeurs absolues sont aussi régulièrement douteuses.

Q7 Sur cette question où le résultat est donné, les candidats ne doivent pas se contenter d'une suite de calculs. Le terme « relation de Chasles », en particulier, doit apparaître. Ce n'est pas aux correcteurs de deviner la démarche des candidats. Une partie des candidats confondent d'ailleurs linéarité de l'intégrale et relation de Chasles.

Q8 Cette question est technique et demande d'utiliser divers théorèmes d'analyse de première année (théorème des bornes atteintes, inégalité des accroissements finis). Elle demande de la rigueur dans les majorations d'intégrales avec des valeurs absolues et des inégalités triangulaires, ce qui a fait largement défaut aux candidats. On observe trop de passages à la limite sur une partie de l'expression tout en gardant des x par ailleurs. Certains candidats ont cru parvenir à la réponse avec des sommes de Riemann.

Q9. Le nombre de candidats ayant eu recours à une intégration par parties pour calculer $\int_0^K \psi'(t)\mathrm{d}t$, au lieu d'utiliser directement ψ comme primitive, a largement inquiété le jury. Il faut reconnaître des conditions simples d'application de techniques mathématiques de base.

Q10 Il fallait utiliser **Q8** et **Q9**, en pensant à rappeler les hypothèses d'application de **Q8**.

Q11 Il suffisait d'appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à $\psi^{(l)}$ (en en rappelant les hypothèses). Trop de candidats appliquent la formule à ψ, puis obtiennent le résultat par une dérivation farfelue de l'intégrale restante.

Q12 Question technique peu réussie. Trop de candidats pensent qu'il suffit de montrer que l'intégrale tend vers 0, sans se soucier du fait que le terme $\dfrac{1}{x^k}$ tend quant à lui vers $+\infty$.

Q13 Mêmes remarques qu'à la question précédente.

Q14 Les candidats ne citent pas suffisamment les questions précédentes utilisées et laissent donc aux correcteurs le loisir de deviner d'où sortent leurs différentes étapes.

Q15 Question relativement réussie. Cependant, encore une fois, dans cette question dont le résultat est donné dans l'énoncé, les candidats doivent donner davantage d'explications précises pour l'apparition de tous les termes.

Q16 à Q19 Mêmes remarques qu'à la question précédente. À chaque fois, on attend bien que les questions utilisées soient précisément citées.

Q20 Peu de candidats traitent cette question. Une majorité d'entre eux arrivent au moins à trouver $A = \int_0^K \psi(t)\mathrm{d}t$. Pour avoir tous les points, il fallait bien préciser les résultats utilisés et expliquer pourquoi la somme infinie était en fait égale à une somme finie.

3.3.2. Partie B

Q21 Une majorité des candidats traite la question. Entre les erreurs d'application de l'énoncé, les erreurs de calcul ou les candidats laissant des valeurs littérales dans les coefficients, seule une moitié prend tous les points de la question.

Q22 On rappelle aux candidats de soigner la rédaction des récurrences, de bien faire attention à ne pas mettre de quantificateur universel dans l'hypothèse de récurrence, d'être cohérent entre l'initialisation et l'ensemble dans lequel est choisie la variable pour l'hypothèse de récurrence. Beaucoup de candidats réussissent l'initialisation et, souvent, l'égalité des dérivées des polynômes. Une portion plus réduite est attentive aux constantes d'intégration.

Q23 Une grande partie de ceux qui ont traité la question arrivent à déduire le cas impair de la question précédente. Une moins grande partie ont vu le lien avec l'intégrale nulle de B_{p-1} sur $[0,1]$ pour obtenir $b_p = B_p(1)$. Les candidats n'ont pas toujours été très attentifs aux valeurs de p pour lesquelles leur raisonnement était valide.

Q24 La plupart des candidats comprennent qu'il faut utiliser une intégration par parties et s'en sortent avec des arguments plus ou moins valables pour obtenir le résultat final. Il aurait été judicieux ici de revenir à la définition de $\tilde{B}_p$ et de remplacer $\lfloor t \rfloor$ par k. Sans faire cette démarche, on voit souvent des $\tilde{B}_{p+1}(k+1) = B_{p+1(1)}$ et $\tilde{B}_{p+1}(k) = B_p(0)$ en invoquant la 1-périodicité, mais on sent que les candidats ont beaucoup cherché à coller au résultat final sans toujours comprendre d'où sortait $B_{p+1(1)}$.

Q25 La question est sans grande difficulté technique mais demande de détailler proprement les étapes.

Q26 Question plus technique, peu traitée, et très peu traitée correctement et intégralement.

Q27 Question très mal traitée (et maltraitée). Des arguments farfelus apparaissent régulièrement sur l'intégrabilité (produits de fonctions intégrables, fonctions polynomiales intégrables en $+\infty$, fonctions qui tendent vers 0 intégrables en $+\infty$ …). L'indépendance vis-à-vis de p a été très peu abordée avec succès.

Q28 Beaucoup de candidats ont cru pouvoir grappiller des points en donnant les valeurs des sommes finies usuelles $\sum_{k=1}^{R} 1$, $\sum_{k=1}^{R} k$ et $\sum_{k=1}^{R} k^2$, avec R entier. Un certain nombre de candidats effectuent les bons calculs, mais le jury regrette à nouveau le manque d'explications ou de vérification des hypothèses dans une bonne partie des réponses, en particulier la valeur de p est rarement identifiée.

Q29 Question peu traitée, et encore moins avec succès.

3.3.3. Partie C

Q30 Question abordée par un tiers des candidats, et seulement un tiers d'entre eux y ont pris des points. La justification du caractère polynomial des P_n est régulièrement oubliée, les raisonnements d'unicité sont souvent loin du compte.

Q31 Question peu traitée et rarement de manière pertinente.

Q32 Trop de candidats se sont lancés dans une règle de d'Alembert en majorant au numérateur et au dénominateur par la norme infinie des P_n, ce qui est problématique au dénominateur.

Q33 Beaucoup croient dériver une série entière alors que, pour la variable x, ce n'en est pas une.

Q34 Peu de candidats se rendent compte qu'ils peuvent obtenir une équation différentielle simple à l'aide de la dérivée de $x \mapsto S(x,t)$.

Q35 à Q44 Questions peu voire très peu traitées.

3.4. Conclusion

Le jury recommande aux candidats de s'entraîner aux manipulations d'inégalités, de valeurs absolues, de majorations d'intégrales avec des inégalités triangulaires, etc. Il encourage les candidats à s'exercer aux calculs un peu techniques (pour la deuxième année d'affilée sur cette épreuve, la grande majorité des candidats sont incapables d'aboutir à un résultat correct sur un calcul de développement limité).

La qualité de l'argumentation n'a pas été suffisante sur cette épreuve. Trop de réponses sont constituées de suites de calculs avec pas ou peu d'explications pour les étapes, trop peu de vérification des hypothèses nécessaires pour appliquer des résultats du cours ou des questions précédentes et des étapes sautées par facilité. On attend de futurs ingénieurs de la maîtrise des connaissances et des compétences, de la rigueur et de l'honnêteté intellectuelle. C'est en s'efforçant de suivre ces lignes directrices que les candidats pourront réussir pleinement.