

2. Mathématiques 1

2.1. Introduction

Le sujet a pour objectif d'étudier la notion de conditionnement d'une matrice inversible, très importante lorsque l'on souhaite résoudre un système linéaire $AX = Y$ à l'aide d'un algorithme. Plus le conditionnement est important, plus les erreurs d'arrondis sur le calcul approché de X risquent de l'être.

Le problème est constitué de cinq parties comportant de nombreuses questions indépendantes des parties précédentes :

- la première partie porte sur l'étude d'une norme N sur l'ensemble des matrices carrées. Elle requiert une bonne connaissance des définitions d'une norme et de la borne supérieure, ainsi que des notions de matrices orthogonales ou symétriques ;
- la deuxième partie introduit la définition du conditionnement et en propose quelques propriétés. On y étudie également un exemple d'une matrice dite mal-conditionnée, c'est-à-dire ayant un conditionnement important ;
- dans les troisième et quatrième parties, on propose d'établir des relations entre le conditionnement d'une matrice inversible et le spectre de A , et on traite l'exemple d'une matrice tri-diagonale. Quelques formules de trigonométrie y sont utilisées ;
- enfin, la dernière partie est dédiée à une inégalité, appelée inégalité de Kantorovich. Le résultat est démontré de deux manières : d'une part en s'appuyant sur les parties précédentes du problème et d'autre part à l'aide d'une approche probabiliste.

2.2. Analyse globale des résultats

La première partie, qui propose l'étude d'une norme sur l'ensemble des matrices, a été abordée par tous les candidats, mais peu ont réussi à manipuler les bornes supérieures avec la rigueur qui était attendue. Dans sa seconde moitié, qui fait manipuler des matrices symétriques ou orthogonales, de très bonnes réponses ont été proposées, avec notamment une bonne utilisation du théorème spectral.

Les deuxième et troisième parties ont été bien mieux réussies et des réponses très pertinentes ont été fournies sur de nombreuses copies.

La quatrième partie, consacrée à l'étude d'un exemple, a été étudiée par une grande majorité des candidats. Toutefois, de nombreuses erreurs de formules trigonométriques n'ont permis qu'à quelques copies de proposer un résultat final correct.

La dernière partie a été moins abordée, les candidats n'ayant sans doute pas eu le temps d'arriver jusque là.

Concernant la présentation des copies, les correcteurs regrettent que trop peu d'entre elles soient clairement présentées, avec des questions numérotées correctement, traitées dans l'ordre, des résultats encadrés et où les erreurs sont barrées proprement. Ceux qui dérogent à ces règles de base font tout de suite mauvaise impression et prennent le risque d'être moins bien compris par les correcteurs.

2.3. Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux candidats

Le jury souhaite insister sur un certain nombre de points qui ont souvent posé problèmes aux candidats.

Les candidats doivent faire un effort de présentation des copies, numéroter les questions, les traiter dans l'ordre (quitte à laisser des blancs pour y revenir), barrer proprement les erreurs et encadrer leurs résultats.

L'utilisation des abréviations doit être limitée : si certaines (CNS, SSI...) sont très couramment utilisées, d'autres (SRS pour « scindé à racines simples », par exemple) le sont nettement moins. De même, l'emploi d'abréviations telles que \forall , \iff doit être modéré dans des explications et ces symboles ne doivent figurer que dans des assertions ne contenant que des symboles mathématiques.

Un raisonnement doit être articulé avec des mots clés (considérons, or, donc, car, en effet) : les hypothèses et les objectifs doivent être clairement identifiés.

Les notions de majorant, de borne supérieure ou de maximum ont des définitions bien précises et il est important de ne pas les confondre. Les correcteurs regrettent les nombreuses confusions qu'ils ont pu lire dans les copies, notamment dans la première partie du problème. Par exemple, un majorant n'est pas nécessairement la borne supérieure. Dans ce même thème, rappelons qu'une partie de \mathbb{R} doit être majorée ET non vide pour admettre une borne supérieure. Enfin, la phrase « Par passage à la borne supérieure », certes bien pratique, était souvent insuffisante.

Quelques erreurs sur les normes ont été repérées. Rappelons par exemple qu'une norme n'est pas linéaire. Par ailleurs, plusieurs copies confondent « être bien définie » avec le caractère défini d'une norme.

Le produit de deux matrices peut être nul alors qu'aucune des deux matrices initiales n'est nulle.

Les candidats doivent toujours avoir conscience des objets qu'ils manipulent. Par exemple, dans ce sujet, la norme N devait s'appliquer à des matrices carrées (et non pas à des réels ou à des matrices colonnes) ; la norme $\|.\|$, quant à elle, s'appliquait à des vecteurs de \mathbb{R}^n .

La norme matricielle d'une matrice inversible A et de sa matrice inverse A^{-1} ne sont pas nécessairement égales, sinon, la notion de conditionnement n'aurait que peu d'intérêt.

Lors du calcul d'un déterminant, les opérations utilisées doivent figurer ; ce n'est pas au correcteur de deviner ce qui a été fait.

La continuité d'une application linéaire n'est pas toujours acquise. Elle est cependant vraie lorsque l'espace vectoriel de départ est de dimension finie.

Un vecteur X est vecteur propre d'une matrice A s'il vérifie $AX = \lambda X$ et s'il est non nul. Ce dernier point est fréquemment oublié.

Dans la question **Q39**, la définition d'une loi de probabilité n'est pas connue suffisamment bien. En particulier, il ne fallait ici pas oublier de noter que les x_i^2 étaient positifs.

Dans la question **Q42**, les propriétés de l'espérance devaient être rappelées, en particulier, sa croissance, sa linéarité ou encore sa positivité.

2.4. Conclusion

Le sujet était d'une longueur raisonnable et la diversité des chapitres mathématiques nécessaires (normes, réduction, produits scalaires, probabilités...) a permis à tous les candidats de traiter

de nombreuses questions et de mettre en évidence leurs compétences. Quelques lacunes sur des notions de base ont malheureusement aussi été repérées.

Quelques candidats ont abordé avec succès les questions plus difficiles qui parsemaient le sujet, et les correcteurs tiennent à les en féliciter.

Il est conseillé aux futurs candidats de bien travailler toutes les notions vues en cours, y compris celles vues en première année.

Les correcteurs ont constaté cette année une grande disparité entre des candidats qui ont une bonne maîtrise de la rédaction (logique, double implication, clarté des calculs entrepris, etc.) en mêlant rigueur, justesse et clarté, et d'autres candidats qui s'en préoccupent moins. Tous les futurs candidats sont donc invités à faire un effort dans ce domaine afin d'éviter d'être pénalisés par un malus. Enfin, les correcteurs regrettent que certains candidats n'utilisent pas suffisamment leur brouillon et se lancent trop rapidement dans la rédaction d'une réponse aussitôt l'énoncé lu. De nombreuses erreurs grossières pourraient ainsi être évitées.