



CONCOURS COMMUN INP 2025

RAPPORT DE L'ÉPREUVE ÉCRITE DE MATHÉMATIQUES

1 - COMMENTAIRE GÉNÉRAL SUR L'ÉPREUVE

Structure du sujet

- **Exercice de probabilités** : une variante de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour une loi de Poisson.
- **Problème 1 d'analyse** : séries de Fourier, faisant appel aux connaissances sur les séries et l'intégration.
- **Problème 2 d'algèbre** : inégalité et matrices de Hadamard, avec une partie d'analyse.

L'exercice de probabilités explore l'affinement de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à une loi de Poisson, en utilisant les fonctions génératrices et l'inégalité de Markov pour obtenir des majorations plus précises que l'approche classique.

Le premier problème explore la série de Fourier d'une fonction affine par morceaux, demandant aux candidats de construire rigoureusement son prolongement impair et périodique, puis de démontrer la convergence ponctuelle de sa série de Fourier par des techniques d'analyse du programme.

Le second problème établit l'inégalité de Hadamard reliant le déterminant d'une matrice au produit des normes de ses colonnes, en s'appuyant sur l'inégalité arithmético-géométrique et le théorème spectral. La partie finale introduit les matrices de Hadamard, objets combinatoires qui réalisent l'égalité dans cette inégalité, et conduit à une condition nécessaire d'existence liée à la conjecture de Hadamard encore ouverte aujourd'hui.

Le sujet permettait aux candidats d'avancer assez loin avec des questions élémentaires bien réparties (Q5, Q6, Q10, Q16) offrant des points d'ancrage. Les dernières questions n'étaient pas forcément les plus difficiles, permettant aux candidats lucides de sauter certaines parties pour traiter les plus abordables en fin de sujet. Les questions de cours étaient bien identifiables. Les correcteurs ont recensé très peu de copies vides.

2 - COMMENTAIRE GÉNÉRAL SUR LES COPIES

2.1 Présentation et lisibilité

La présentation est globalement satisfaisante et les correcteurs saluent les efforts, notamment pour mettre en évidence les résultats. Quelques copies restent difficiles à lire (une copie était même rédigée en deux colonnes !)

2.2 Organisation du travail

La plupart des candidats traitent les questions dans l'ordre, ce qui participe à une bonne lisibilité de la copie.

2.3 Qualité de la rédaction

Défauts principaux identifiés :

2.3.1 Manque de rigueur dans les justifications

- Trop de candidats affirment sans justifier (« il est évident que... », « cela est facilement vérifiable »). Les correcteurs rappellent que de telles affirmations n'ont aucune valeur et ne rapportent aucun point.
- Sur les questions où la réponse est donnée, beaucoup ne détaillent pas les calculs (très flagrant sur Q19), ce qui n'apporte aucune valeur dans la copie. Pire, un manque d'honnêteté intellectuelle est toujours sanctionné.

2.3.2 Problèmes de logique

- Mauvaise compréhension du « si et seulement si » (Q21, Q24, Q27).
- Confusion entre variable aléatoire X et son image $X(\omega)$.
- Utilisation inappropriée de théorèmes (convergence uniforme, théorème d'interversion série-intégrale).
- De nombreux candidats perdent l'idée que e^{ix} est un nombre complexe en proposant des majorations inappropriées.
- $|X - \lambda| \geq \lambda$ devient incorrectement $-\lambda \geq X - \lambda \geq \lambda$.

2.3.3 Rédaction défaillante

- Deux défauts s'opposent : soit imprécision/manque de justifications, soit pléthore d'arguments mal ordonnés. On notera en particulier de longs raisonnements par récurrence parfaitement inutiles.
- Utilisation de résultats éloignés du cours sans démonstration.

2.4 Utilisation des quantificateurs et des hypothèses

- Utilisation globalement correcte des quantificateurs, sauf en Q14 où l'oubli des quantificateurs rendait creux toute tentative de raisonnement.
- **Problème récurrent** : les hypothèses des théorèmes sont parfois malmenées ou omises.
- L'utilisation de questions précédentes nécessite souvent plus de précisions que « d'après la question X... », notamment en précisant les conditions d'application du résultat cité.

3 - COMMENTAIRE PAR QUESTION

3.1 EXERCICE - Probabilités

Q1 : Question de cours très majoritairement connue et bien réussie. Quelques confusions isolées avec la loi géométrique.

Q2 : Bien réussie dans l'ensemble. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est connue, mais trop peu de candidats rappellent l'énoncé général et l'appliquent directement au cas particulier.

Q3 : Convenablement réussie mais parfois avec des justifications confuses. Certains candidats montrent l'inclusion contraire ou utilisent une prétendue croissance de $|\cdot|$ sur \mathbb{R} .

Q4 : Déduction facile des questions précédentes, bien justifiée dans la plupart des copies.

Q5 : Questions de cours généralement réussies. Peu de calculs de rayon de convergence, beaucoup de résultats non justifiés. Certains divisent par zéro en appliquant le théorème de d'Alembert.

Q6 : Très bien réussie.

Q7 : Question difficile. Différentes méthodes proposées :

- Utilisation de Markov (manque souvent de justifications, oubli d'utiliser $t \geq 1$)
- Le cas α non entier rarement bien traité

Q8 : En général bien traité. Beaucoup de candidats voient $t = 2$ comme optimum, certains démontrent que c'est le meilleur majorant.

Q9 : Question la moins réussie du sujet. Très peu de bonnes réponses malgré quelques tentatives intéressantes. Mauvaise lecture de l'énoncé $e \times (\ln(4)-1)$ souvent interprété comme $e^{\ln(4)-1}$.

3.2 PROBLÈME 1 - Séries de Fourier

Q10 : Question bien réussie dans l'ensemble. Certains candidats n'explicitent pas le changement de variable $x = -t$ et invoquent vaguement la parité de la fonction pour terminer le calcul.

Q11 : La question est parfois mal comprise avec des problèmes souvent observés :

- prolongement en fonction impaire souvent faux (problèmes de signe);
- valeur en 0 minoritairement bien mentionnée;
- représentations graphiques parfois étranges ; certains candidats semblent voir les fonctions périodiques comme nécessairement sinusoïdales.

Q12 : De nombreux candidats n'utilisent pas le résultat de la **Q11** et perdent du temps à refaire la démonstration notamment pour le calcul de a_n :

- intégration par parties sur fonction non continue ;
- confusion fréquente : $\cos(n\pi) = 1$ au lieu de $(-1)^n$.

Q13 : La résolution de $te^{ix} = 1$ pose beaucoup de difficultés. Les candidats ont tendance à passer systématiquement par parties réelle/imaginaire au lieu d'utiliser modules et arguments.

Q14 : Très mal réussie. Le théorème des bornes atteintes est très rarement cité. Beaucoup pensent que $\forall(x, t), |1 - te^{ix}| > 0$ suffit pour prouver l'existence d'un minorant strictement positif.

Q15 : Question simple ne nécessitant pas de gros théorème, mais la quantification des variables est souvent négligée et la convergence par domination, inutile mais fonctionnelle ici, est justifiée plus ou moins proprement.

Q16 : Somme géométrique finie reconnue par tous, mais peu de candidats vérifient que la raison $\neq 1$. La factorisation par $1/t$ est souvent opérée sans distinguer $t = 0$ ou $t \neq 0$.

Q17 : **Question très peu réussie**. Peu utilisent les résultats des questions précédentes. Beaucoup tentent l'interversion série-intégrale sans vérifier les hypothèses.

Q18 : Calcul généralement correct quand il est commencé. La justification de l'existence de l'intégrale est souvent mal faite (examen uniquement des bornes 0 et 1).

Q19 : **Question technique** nécessitant de bonnes connaissances trigonométriques. Beaucoup pensent à $\lambda = \cos(x)$ mais très peu aboutissent. Les candidats se contentent souvent de recopier l'énoncé ou bluffent éhontément sur les simplifications de la fonction arctangente.

Q20 : Question peu traitée. Ceux qui l'abordent oublient souvent que les calculs ne s'appliquent que pour $x \in]0, \pi[$.

3.2 PROBLÈME 2 - Inégalité et matrices de Hadamard

Q21 : Cette question classique n'est pas toujours bien réussie. L'unicité du cas d'égalité est rarement bien traitée. La stricte monotonie de la fonction utilisée est peu mentionnée.

Q22 : Question facile et bien réussie, bien que la vérification $A \neq 0$ soit rarement mentionnée. Cependant, de nombreux candidats redémontrent exactement l'inégalité de convexité utile ici ou l'utilisent sans vraiment voir le lien avec la **Q21**. D'autres confondent "non tous nuls" et "tous non nuls".

Q23 : Le produit des inégalités est mené correctement dans environ la moitié des copies. La positivité des termes est très peu soulignée lors de la multiplication.

Q24 : Le lien avec **Q21** est peu observé et les autres tentatives de raisonnement sont vouées à l'échec.

Q25 : Les candidats connaissent bien le théorème spectral. Énoncé parfois mal formulé. Erreur classique sur $\det(S)$ sans mentionner la multiplicité.

Q26 : Lien généralement fait avec la **Q23**, mais positivité des valeurs propres rarement mentionnée.

Q27 : Lien fait avec la **Q24**, même remarque sur le « si et seulement si ».

Q28 : **Question peu réussie**. Beaucoup pensent qu'une matrice définie positive est une matrice à coefficients > 0 . Erreur classique : $\sum s_{j,j} = \sum \lambda_j > 0$ donc $\forall j, s_{j,j} > 0$.

Q29 : Question plutôt technique correctement traitée. Calculs matriciels parfois « dessinés » au lieu d'utiliser les formules. Caractère défini positif de $D^{-1}S D^{-1}$ moins bien réussi.

Q30 : Peu abordée, mais réussie par les candidats ayant du recul. Caractère diagonal rarement bien justifié.

Q31 : Arguments souvent justes quand traitée, mais des candidats oublient souvent une partie (« symétrique » ou « définie positive »).

Q32 : **Question très peu abordée**. Cas non inversible souvent oublié. Interprétation sur l'orthogonalité des colonnes moins abordée.

Q33 : Utilisation appropriée de la **Q32** par ceux qui la traitent. Cas d'égalité exceptionnellement regardés.

Q34 : **Question plus simple** que les précédentes, souvent traitée en sautant les précédentes. Généralement bien réussie.

Q35 : Première partie souvent comprise, la fin est laissée de côté. Calculs parfois défaillants pour vérifier que la matrice est d'Hadamard.

Q36 et **Q38** : Traitées par une petite minorité, ces questions abordables ont été profitables à ceux qui s'y sont penchés.

4 - RECOMMANDATIONS AUX CANDIDATS

1. **Rigueur dans les justifications** : il faut avoir conscience que toute affirmation n'a de valeur que si elle s'inscrit dans une argumentation. Mieux vaut ne rien indiquer ou expliciter le défaut de compréhension plutôt que de faire preuve de malhonnêteté intellectuelle qui sera sanctionnée.
2. **Lecture globale des problèmes** : les questions ont un enchaînement logique et il convient de réutiliser autant que faire se peut les résultats démontrés dans les questions précédentes, à conditions de préciser rigoureusement les conditions d'application comme on le ferait pour un théorème du cours.
3. **Gestion stratégique du temps** : Il est profitable de savoir identifier les questions abordables en fin de sujet
4. **Rédaction claire et concise** : Écrire l'essentiel de manière structurée est un vrai atout, ce qui peut demander une organisation du raisonnement au brouillon avant de rédiger sur la copie.