

## RAPPORT MATHS PC EPREUVE 1 2025

### 1. COMMENTAIRES GÉNÉRAUX

Le sujet de cette année avait pour finalité d'étudier les perturbations de rang 1 de matrices et plus particulièrement les déformations du spectre sous ces perturbations. Il comportait également une partie probabiliste où ces déformations étaient considérées comme aléatoires.

Les questions du sujet étaient de longueurs et de difficultés variables mais globalement bien réparties dans le sujet, qui était de longueur raisonnable. Il était structuré autour de 5 parties qui, bien que n'étant pas complètement indépendantes, pouvaient être traitées séparément en admettant les résultats des questions précédentes. Si l'intégration de notations au fur et à mesure du sujet était nécessaire - ce qui a pu poser des problèmes à certains candidats - il convenait surtout d'être vigilant sur les hypothèses faites et d'avoir une argumentation claire, précise et correcte, surtout pour les nombreuses questions où les résultats étaient fournis. Le sujet comportait des questions sur des domaines variés, principalement en l'algèbre linéaire et bilinéaire mais également en analyse et en probabilités. Aucune ne nécessitait de calculs longs ou techniques. La gestion du temps et de l'avancée dans le sujet n'a pas été un point problématique cette année même si, de façon évidente, une bonne maîtrise et un recul par rapport au programme et au sujet sont toujours des éléments utiles dans ce domaine. En revanche, nous notons cette année que la rédaction a souvent été imprécise, incomplète ou même erronée dans certaines questions, y compris des questions relativement simples, mettant en lumière le manque de compréhension de certaines notions essentielles. Nous suggérons donc aux candidats de bien relire les questions et les arguments proposés pour ne pas oublier une partie de la question et vérifier que le raisonnement employé et les hypothèses utilisées correspondent bien à celles de l'énoncé.

Globalement, toutes les parties ont été abordées par les candidats puisque le début de chacune d'entre elles était accessible en admettant les résultats des parties précédentes. La difficulté était alors de pouvoir avancer aussi loin que possible dans chaque partie et de traiter les questions principales et plus difficiles de ces dernières. Les parties 1 et 2 ont en général été traitées convenablement. La partie 3, plus longue et plus technique, a été discriminante pour beaucoup. La partie 4, qui traitait des perturbations aléatoires, a été plus inégalement traitée, certains candidats - y compris des bons candidats - ont préféré ne pas l'aborder ou très peu, faute peut-être des connaissances suffisantes en probabilités. A l'inverse, des candidats en difficulté sur la partie 3 ont pu démontrer leurs aptitudes en probabilités et se relancer dans cette partie. La dernière partie, relativement courte et synthétisant certains résultats du sujet, a été aussi relativement bien abordée, certaines questions simples ou de synthèse pouvant être traitée lorsque les résultats et notations du sujet avaient été assimilés.

Rappelons comme chaque année quelques recommandations importantes. Nous insistons sur l'importance d'une rédaction rigoureuse et soignée, ainsi que sur une mise en valeur claire de la structure de la copie (numérotation des questions et présentation adéquate des résultats). De plus, un soin minimal et une écriture lisible sont attendus et l'utilisation des questions précédentes nécessite de les mentionner

explicitement et précisément pour être valorisée. Enfin, si la pondération des questions est généralement proportionnelle à leur difficulté, il est absolument nécessaire de prendre le temps de fournir une rédaction correcte des réponses données, y compris pour les résultats élémentaires. La stratégie de survoler le sujet en ne répondant qu'aux questions les plus simples ne peut aboutir à une note correcte.

## 2. EXAMEN DÉTAILLÉ DES QUESTIONS

**Partie I.** Cette partie était consacrée à l'écriture d'une matrice de rang 1 sous la forme d'un produit de deux vecteurs.

1. Question abordée dans essentiellement toutes les copies et classique. Plusieurs options étaient possibles en utilisant la dimension de l'image notamment. L'utilisation du théorème du rang et la caractérisation du noyau était possible mais beaucoup plus longue.

2. Question abordée dans la majorité des copies. Elle consistait en la simple application de la question précédente après une identification explicite des vecteurs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$ .

3. Il s'agit de la première question difficile du sujet car il fallait construire explicitement les vecteurs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  et utiliser les questions précédentes. Certains candidats ont oublié de vérifier que les vecteurs ne devaient pas être nuls. D'autres ont bien construit les vecteurs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  mais n'ont pas justifié que  $K = \mathbf{u}\mathbf{v}^T$  alors que le calcul de vérification n'était pas long ni difficile à ce stade.

4. Cette question a aussi posé problème à un nombre important de candidats. L'identification de l'image par la question précédente donnait la colinéarité de  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{x}$ , argument qui a manqué à beaucoup. A ce stade, la fin de la démonstration ne posait plus de problème.

5a. Question traitée correctement par la quasi-totalité des candidats par un calcul direct.

5b. De même, question traitée correctement par la quasi-totalité des candidats par un calcul direct qui était certes un peu plus long que le précédent, mais sans difficulté notable.

5c. Cette question a été inégalement traitée. En effet, raisonner par équivalent était très difficile et il était beaucoup plus simple de procéder à la démonstration de chaque implication séparément. L'erreur la plus courante a été une mauvaise connaissance du théorème de diagonalisation. Rappelons que si la matrice est annulée par un polynôme à racines simples, elle est diagonalisable mais que la réciproque est fautive. Cet argument ne pouvait donc fournir qu'une implication, l'autre nécessitant un argument supplémentaire. Ce dernier pouvait se faire en observant si la trace est nulle alors les seules valeurs propres sont nulles et que donc si la matrice était diagonalisable, elle serait identiquement nulle.

6. Question très peu traitée hormis par les meilleurs candidats. Le sens réciproque ne posait pas de difficulté même s'il fallait vérifier toutes les conditions d'un projecteur orthogonal ( $P^2 = P$  et  $P^T = P$ ), le rang étant une application directe la première question. Le sens direct était en revanche bien plus délicat. Le point de départ était la question 3, qui donnait deux vecteurs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  à partir desquels le fait

d'avoir un projecteur orthogonal permettait de travailler pour obtenir le résultat souhaité.

**Partie 2.** Cette partie établissait des résultats sur l'inversibilité de la perturbation d'une matrice par une matrice de rang 1.

7. Question de calcul par blocs traitée par la quasi-totalité des candidats.

8. Question très mal traitée par les candidats. Rappelons en effet que le déterminant ne se calcule généralement pas par blocs. Il fallait absolument préciser que les matrices étaient triangulaires inférieures ou supérieures ou utiliser un développement selon les lignes ou les colonnes pour justifier le calcul. Il s'agit typiquement d'une question où même de très bons candidats ont été pris en défaut.

9. La question nécessitait un certain soin dans la rédaction pour pouvoir appliquer le résultat de la question précédente. En particulier, le fait que  $A$  est inversible doit être utilisé au bon moment.

10. Question très simple par application du résultat de la question précédente. Certainement une des questions les plus souvent traitées.

11. Pour obtenir le résultat demandé, il fallait multiplier la proposition de l'énoncé avec  $A + \mathbf{u}\mathbf{v}^T$  et vérifier que le calcul donnait bien l'identité. Cette vérification était calculatoire et a posé de multiples difficultés. Certains candidats ont également abandonné le calcul en cours de route.

12. Cette question ouverte (dans le sens où l'énoncé ne donnait pas la réponse) a été assez peu traitée alors que trouver un contre-exemple est relativement simple. Notons qu'il était attendu un contre-exemple valable dans une dimension arbitraire et pas seulement en dimension 2.

**Partie 3.** Cette partie établissait des résultats sur le spectre de la perturbation d'une matrice symétrique par une matrice de rang 1 également symétrique.

13. Question très simple par le calcul de  $B^T = B$  qui a été traitée par la quasi-totalité des candidats.

14. L'énoncé suggèrait clairement d'utiliser l'identification sur une base de vecteurs et ici la base  $(\mathbf{v}_k)_k$  était parfaitement adaptée pour le calcul qui devenait immédiat.

15a. Beaucoup de candidats se sont lancés sur des raisonnements flous et peu convaincants en utilisant le théorème spectral. Alors que, de nouveau, il suffisait d'appliquer le résultat admis à la base  $(\mathbf{w}_k)_{1 \leq k \leq n}$  pour conclure en une ligne, ou encore le résultat de la question précédente avec la base  $(\mathbf{w}_k)_{1 \leq k \leq n}$  de vecteurs propres de  $A$  et le fait que  $A = AI_n$ .

15b. La question a dérouté un certain nombre de candidats alors qu'il convient d'appliquer le résultat précédent à  $xI_n - A$  qui est bien symétrique et inversible dès que  $x$  n'est pas une valeur propre de  $A$  et avec les mêmes vecteurs propres que  $A$ . Ces points devaient apparaître clairement dans la copie au risque de ne pas être convaincants. Une autre approche très simple était de multiplier  $xI_n - A$  par la

formule au membre de droite et de prouver que cela est bien égale à  $I_n$ .

16a. Question classique qui se fait par la formule de Grassman. Dans l'application de cette formule, on remarque qu'un nombre non négligeable de candidats confond la somme de deux sous-espaces vectoriels avec leur union.

16b. La question a été abordée correctement par un bon nombre de candidats. Il fallait ici procéder par inclusion en montrant que  $E \cap \{\mathbf{u}\}^\perp \subset \text{Ker}(B - \lambda I_n)$ .

17. Question assez délicate qui utilisait une combinaison de la question 9 et de la question 16. Beaucoup de candidats ont admis ce résultat important pour la suite puisqu'il faisait le lien entre les polynômes caractéristiques de la matrice  $A$  et de sa perturbation.

18a. Question assez simple et bien traitée en utilisant le fait que seul le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs.

18b. Question assez simple mais moins traitée que la précédente. Il suffisait de calculer  $B\mathbf{w}_\ell$  par la définition de  $B$  pour conclure.

18c. Question assez difficile et donc moins abordée. On obtenait facilement toutes les valeurs propres sauf une. Pour cette dernière, l'argument le plus court était d'utiliser la trace qui donnait que  $\text{Tr}(B) = \text{Tr}(A) + 1$  permettant de conclure. Une bonne partie de candidats qui ont cherché à traiter la question ont utilisé erronément la question 17, alors qu'à priori on n'a pas  $\lambda_j + 1 \neq \lambda_k$  pour  $k \neq j$ .

19a. Question abordée par la quasi-totalité des candidats mais avec de mauvaises justifications. Il était indispensable de dire que  $f$  est une fraction rationnelle dont les pôles sont les  $(\lambda_j)_{1 \leq j \leq n}$ . Sans cet argument, il était impossible de justifier le caractère  $\mathcal{C}^\infty$ . Le calcul de la dérivée n'a pas posé de problème en général (sauf le signe parfois).

19b. Il s'agissait d'utiliser le théorème des valeurs intermédiaires sur chacun des intervalles. Rappelons que pour être valide, l'argument doit se faire intervalle par intervalle et doit préciser clairement la monotonie de  $f$  ainsi que les limites aux bords. Sans ces limites, l'argument n'était tout simplement pas valide. Le cas de  $]\lambda_n, +\infty[$  nécessitait une rédaction spécifique.

19c. L'application des questions 17 et 19.b donnait l'existence des  $(\mu_k)_{1 \leq k \leq n}$  ainsi que l'entrelacement. Pour conclure, il suffisait de noter qu'on avait alors obtenu toutes les valeurs propres. La question a été traitée correctement par un petit nombre de candidats. On remarque qu'un bon nombre de candidats utilise de façon erronée la question 17, en affirmant sans justification qu'une valeur propre de  $B$  n'est pas valeur propre de  $A$  et donc est racine de  $f$ .

**Partie 4.** Cette partie s'intéressait aux propriétés moyennes du spectre des matrices précédentes dans le cas où les perturbations étaient choisies de façon aléatoire. Il s'agissait de tester les connaissances en probabilités des candidats en lien avec de l'algèbre linéaire.

20. La difficulté dans cette question était de traduire proprement la notion d'espérance dans le contexte étudié. Une fois la formule de transfert écrite, le caractère

orthonormal de la base  $(\mathbf{w}_k)_{1 \leq k \leq n}$  terminait l'argument. Cette question n'a globalement pas posé de problèmes aux candidats qui se sont attaqués à la Partie 4.

21.  $\chi_B(x)$  ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs donc son espérance est bien définie. L'espérance du résultat de la question 18 permet ensuite de trouver la formule proposée. Cette question a été traitée moins que la question précédente mais n'a globalement pas posé de problèmes aux candidats qui se sont attaqués à la Partie 4.

22. Question dont la rédaction était subtile car il fallait trouver un argument pour pouvoir "passer à la limite" dans le résultat de la question précédente, qui ne s'applique pas directement. Pour cela, on observe que les quantités de la question précédente sont des polynômes en  $x$  qui sont égaux en dehors d'un nombre fini de valeurs. Le caractère polynomial permet alors d'identifier les valeurs manquantes et de conclure.

23. Question qui se traitait facilement par l'absurde dès que l'on avait observé que  $\mathbb{E}(\chi_B(x))$  est un polynôme en  $x$ , qui ne peut pas être nul d'après la question précédente.

**Partie 5.** Cette partie s'intéressait aux propriétés du spectre de la matrice symétrique perturbée mais dans le cas où la matrice initiale possède plusieurs valeurs propres nulles (donc n'est plus inversible, comme cela était supposé dans la partie 3).

24. Question très simple et globalement bien traitée puisque  $\epsilon$  ne peut pas être une valeur propre de  $A$  compte tenu de sa définition.

25. L'utilisation de la question 9 et de l'inégalité supposée par l'énoncé donnait le résultat. Mais compte tenu du recul nécessaire, peu de candidats ont vu le lien.

26. Cette question a été globalement peu traitée compte tenu de sa difficulté et de sa position en fin de sujet. Le point de départ était la question 4 et l'application de la trace à cette relation. Un enchaînement de calculs avec l'inégalité supposée permettait d'obtenir l'inégalité stricte demandée.

27. Question peu traitée mais le point de départ donné par la question précédente a néanmoins été identifié. Il donnait  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\mu_k - \epsilon} > \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k - \epsilon}$ . Par la suite, il fallait décomposer les sommes en trois morceaux suivant la position de l'indice par rapport à  $m$  ce qui était plus délicat et a été peu traité convenablement.