3. Mathématiques 2

3.1. Introduction

Le sujet de cette année traite de polynômes trigonométriques et de l'approximation des fonctions continues 2π-périodiques par ceux-ci. On montre en particulier le théorème de Fejer (cf. **Q15** et **Q16**), puis une version de l'inégalité de Bernstein (**Q25**) qui permet une caractérisation des fonctions α-höldériennes (**Q38**). Le problème touche ainsi de nombreux domaines de l'analyse mais aussi de l'algèbre.

En faisant la part belle au programme de première année, ce sujet a finalement permis de tester une assimilation en profondeur des connaissances. Les méthodes suggérées restent très élémentaires. Le cheminement parfois long a bien testé les candidats sur leur capacité de concentration et leur assimilation des résultats amassés en cours de route.

3.2. Analyse globale des résultats

Globalement, les candidats maîtrisent certes les fondements du programme, mais les questions plus théoriques, plus techniques ou à la frontière du programme (préliminaires, décomposition en éléments simples ou questions demandant une compréhension un peu plus globale du sujet) leur font souvent perdre leurs moyens. On note alors parfois une tendance à écrire des assertions à la limite de l'absurde, parfois dès le début de la copie.

Un autre défaut qui parait facile à remédier consiste à mal lire l'énoncé ou oublier un peu trop vite ce qu'on a lu et fait auparavant. Dans ce sujet, comme souvent, de nombreuses questions s'éclairent quelque peu à la lecture de la suite de l'énoncé.

3.3. Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux candidats

3.3.1. Partie A

Les correcteurs ont été surpris par le manque de maîtrise dans les toutes premières questions. Celles-ci sont habituellement traitées avec plus d'attention – et souvent plus faciles, il est vrai. On relève ici de mauvaises manipulations d'inégalités, des utilisations erratiques des valeurs absolues, même dans certaines copies moyennes par ailleurs.

Q1 Cette question fait le pari de préparer la réflexion sur la question **Q2.b** par un exemple. L'inégalité des accroissements finis est finalement rarement citée. Pour autant, une identité trigonométrique comme $\sin s - \sin t = 2\sin(\frac{s-t}{2})\cos(\frac{s+t}{2})$ est encore moins utilisée.

Q2.a Ici beaucoup de confusion. Le fait qu'une fonction continue sur un fermé borné soit elle-même bornée est souvent évoqué, mais parfois en oubliant que le domaine doit être borné. Ensuite, il est rare que la périodicité soit invoquée pour se ramener à un intervalle borné. Le fait que la quantité étudiée dépende de deux variables est une autre difficulté rarement surmontée. Au total, une copie sur cinq seulement traite la question de façon satisfaisante.

Téléchargé gratuitement sur Doc-Solus.fr

Q2.b Le théorème des accroissements finis est souvent invoqué, parfois en relation avec la notion de fonction lipschitzienne comme à la question **Q1**. Certaines copies notent à juste titre que l'on peut majorer en partant de l'égalité $g(s) - g(t) = \int_t^s g'(x)\,\mathrm{d}x$.

Q3.a L'inclusion des bandes $\{(s,t) \mid |s-t| \leqslant h\} \subseteq \{(s,t) \mid |s-t| \leqslant h'\}$ dans $\mathbb{R}^2$ est rarement bien dégagée d'autres considérations.

Q3.b L'idée a été aperçue par beaucoup de candidats, mais la rédaction d'une solution a finalement posé de grandes difficultés. Lorsque $|s-t| \leqslant h + h'$, on peut séparer les cas selon que $|s-t|$ appartient à $[0, h[$ ou à $[h, h+h']$, mais cette discussion est souvent restée incomplète. Il est également vrai qu'il existe toujours un r tel que $|s-r| \leqslant h$ et $|r-t| \leqslant h'$, mais encore fallait-il argumenter quelque peu.

Q3.c Pour la première inégalité, on voit des récurrences bien organisées. Une solution de proche en proche, du type $\omega(nh) \leqslant \omega((n-1)h) + \omega(h) \leqslant \dots$, est aussi possible – et plus courte pour ces cas de récurrence les plus simples.

La seconde inégalité pose moins de difficultés que la question **(b)**.

Q4 Une question très facile mais réussie ou abordée seulement par une moitié des candidats. On ne voit quasiment jamais de dessin, ce qui pourtant aurait au moins l'utilité de suggérer qu'un changement de variable par translation ne suffit pas à résoudre la question.

Q5 La linéarité de Δ est conséquence de la linéarité de l'intégration mais ne s'y résume pas : ici, à une fonction on associe non pas un nombre mais une autre fonction. Le fait que Δ envoie chaque polynôme trigonométrique sur un polynôme trigonométrique a été comparativement plutôt bien compris, peut-être grâce au fait que la base considérée depuis le début est une base de vecteurs propres pour Δ.

3.3.2. Partie B

Dans la partie B, la manipulation des polynômes trigonométriques n'est pas maîtrisée. En particulier, on relève beaucoup de confusion avec les polynômes. Les copies qui vérifient les convergences des intégrales considérées sont aussi bien trop rares. La bonne foi des candidats paraît en défaut lorsqu'il faut établir l'existence de constantes indépendantes de n dans des inégalités, mais que celles-ci s'avèrent dépendre de n dans une majorité de copies.

Q6 Un calcul qui n'a pas posé de grande difficulté.

Q7 L'erreur d'énoncé concernant φ_n n'a pas paru troubler les candidats. Par contre, certains ont peiné à comprendre qu'il fallait oublier la question précédente et revenir à la définition de φ_n.

Q8 Une fois que la question est comprise, elle est généralement résolue correctement. Mais beaucoup de candidats n'abordent pas la question ou sont déroutés par une formulation inhabituelle.

Q9 La parité (de f_n et de $t \mapsto |t| f_n(t)$) doit être explicitement invoquée, afin de justifier l'égalité $\int_{-\pi}^{\pi} f_n(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

Q10 La seconde inégalité est bien plus abordée que la première. La relation avec la question **Q1** n'est presque jamais aperçue. La concavité de la fonction étudiée est parfois invoquée mais rarement de manière rigoureuse. Hormis des tableaux de variation, on ne voit pratiquement aucun dessin non plus.

Q11 et Q12 Des conséquences faciles de la question précédente. Noter que la convergence des intégrales n'est pas indispensable à ce stade.

Téléchargé gratuitement sur Doc-Solus.fr

Q13 Cette question devrait être une conséquence quasi-automatique de ce qui précède mais nombre de copies oublient d'argumenter la convergence de $\int_0^{+\infty} u^{-k}\sin^4 u\,\mathrm{d}u$ ($k = 3$ ou 4) avant de poser $a = \dfrac{\pi^4}{2^3}\dfrac{\int_0^{+\infty} u^{-3}\sin^4 u\,\mathrm{d}u}{\int_0^{+\infty} u^{-4}\sin^4 u\,\mathrm{d}u}$.

Q14 Une question facile pour ceux qui l'ont abordée.

Q15.a La question devrait résulter facilement de **Q2.b** et **Q13**, pourtant le manque de rigueur dans la manipulation des sup est cause de beaucoup d'échecs.

Q15.b La plupart des candidats ne voient pas que la question porte surtout sur le fait que les $T_n g$ sont bien des polynômes trigonométriques.

Q16 La question n'est abordée que par une moitié des candidats.

Il est facile de voir que la dérivée de g ne joue aucun rôle dans la solution de **Q3**. Nous avons donc admis que **Q3.c** puisse être utilisée dans le **(a)** de **Q16** avec la seule hypothèse que g est continue.

Le **(b)** ne pose pas de grandes difficultés à ceux qui l'abordent, le **(c)** encore moins.

3.3.3. Partie C

Q17 La question est abordée par la moitié des candidats, mais avec un taux d'échec alarmant. Le critère de racines multiples utilisant le polynôme dérivé est pratiquement absent malgré la question qui suit – et la simplicité de T'. Le fait qu'on ne demande pas d'expliciter les racines amène ceux qui s'y risquent à le faire sans beaucoup de soin, le résultat le plus fréquent étant alors les racines n-ièmes de l'unité.

Q18 Notons que la formule demandée s'applique à tout polynôme unitaire factorisé sous la forme $\prod_{i=1}^{n}(X - z_i)$, que les z_i soient distincts ou non.

Q19 La décomposition en éléments simples des fonctions rationnelles à pôles simples semble connue mais peu pratiquée. Notons que l'exemple traité ici est particulièrement élémentaire. Le seul détail à ne pas oublier est que $z_k^n = -1 = z_k^{-n}$.

Q20 Calcul presque immédiat.

Q21.a Bien peu de candidats ont su percevoir que les deux questions précédentes visent précisément à vérifier cette formule pour $P = X^\ell$.

Q21.b Un cas particulier trivial du (**Q21.a**), mais l'aubaine est restée largement ignorée.

Q22 Beaucoup de copies qui abordent la question oublient de vérifier que le sup est fini. Rappelons par ailleurs que la positivité de la norme résulte des axiomes classiques dès lors qu'ils sont vérifiés par une fonction à valeurs réelles.

Q23 Bien traité par ceux qui prennent effectivement $z = e^{i\theta}$ pour $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

Q24 Une question qui reste délicate malgré l'indication fournie.

Q25 Peu traitée.

Téléchargé gratuitement sur Doc-Solus.fr

3.3.4. Partie D

Q26 La question est abordée par un nombre significatif de copies. Mais les considérations restent le plus souvent parcellaires, atteignant tout juste la première inégalité $0 \leqslant x^\alpha - y^\alpha$. Seules les meilleurs copies proposent une étude de fonction.

Q27 Un peu plus de succès ici, mais la constante K n'est presque jamais nommée.

Q28 Les difficultés de la question **Q26** deviennent ici insurmontables pour la plupart des copies qui abordent la question **Q28**.

Q29 Encore une étude de fonction relativement banale mais qui ne reçoit pas assez d'attention pour aider les candidats.

Q30 Une question difficile qui demandait, outre l'inégalité de la **Q29**, de remarquer que $y\ln(y) \leqslant (x+y)\ln(x+y) - x\ln x$ pour tout $y \in \left]0,1\right[$ et $x \in \left]0, 1-y\right]$. Très peu de candidats l'ont abordée.

Q31 La question de la continuité des fonctions α-höldériennes est parfois oubliée, de même que la justification de $\mathcal{H}_{2\pi}^\alpha \neq \emptyset$.

Q32 Très peu abordée.

Q 33 Quelques candidats notent bien la nécessité d'appliquer le théorème des bornes atteintes à la fonction $q \mapsto \|f-q\|_\infty$ sur $\mathcal{T}_n$. Le fait que celle-ci est continue, voire 1-lipschitzienne, est parfois perçu. Justifier de se restreindre à un borné reste très difficile. Quelques copies font allusion à la notion de projection et proposent en vain une formule qui s'applique aux bases orthonormées pour un produit scalaire.

Q34 à 38 Les questions suivantes sont très peu abordées.

3.4. Conclusion

Les lacunes en termes de rédaction peuvent inquiéter quand elles ne sont pas entièrement attribuables à la difficulté des questions. Au final, la pauvreté des commentaires sur les calculs, l'abus d'abréviations et la quasi-absence de représentations graphiques donnent l'image d'étudiants assez démunis au plan de l'argumentation.

Pour le reste, l'épreuve aura bien permis de tester et de classer les candidats sur leur assimilation de concepts élémentaires du programme de mathématiques (inégalités, différentes notions de fonctions) et leur capacité à construire sur ce qu'ils ont assimilé.

Téléchargé gratuitement sur Doc-Solus.fr