

## 2. Mathématiques 1

### 2.1. Introduction

Cette épreuve propose deux exercices autour du principe d'incertitude d'Heisenberg.

La partie A du sujet constitue le premier de ces deux exercices. On y propose de vérifier que les fonctions gaussiennes réalisent l'égalité dans le principe d'incertitude.

Les parties B à D du sujet s'intéressent à un opérateur de Laplace  $A \mapsto L_A$  défini sur certaines matrices symétriques. La partie B se concentre sur un cas particulier en taille  $4 \times 4$  (partie B-I), puis introduit la classe particulière de matrices symétriques dont il sera question dans la suite du sujet (propriété  $\Gamma$  citée en question **Q15**). On montre alors que le noyau de leur laplacien est de dimension 1.

La partie C se concentre d'abord sur l'étude spectrale complète du laplacien  $L_A$  pour une matrice  $A$  particulière (partie C-I). On introduit ensuite les concepts de région de faisabilité et de courbe d'incertitude dans les parties C-II et C-III. La partie D propose enfin un calcul exact de l'enveloppe inférieure de la région de faisabilité.

### 2.2. Analyse globale des résultats

Sur les 3664 copies corrigées, la moyenne constatée, en pourcentage du barème, est de 29,8 %, pour un écart-type de 15,3 %, ce qui permet de considérer le sujet comme de longueur plutôt élevée, mais permettant un niveau de discrimination satisfaisant parmi les candidats. La meilleure copie obtient 85 % des points du barème total.

Comme nous le verrons plus loin, la sélection des meilleurs candidats s'est essentiellement faite sur deux points : la connaissance (parfois élémentaire) du cours et la maîtrise des calculs de base, bien plus que sur le volume traité ou l'originalité des idées.

Concernant le premier point, à titre d'exemple, la question **Q4**, consistant en l'application du théorème  $C^1$  pour les intégrales à paramètres avec le rappel et la vérification organisée des hypothèses qui le composent – question traitée par la quasi-totalité des candidats – n'a été réussie (même approximativement) que par une part minoritaire d'entre eux (41 %). La toute première question du sujet, demandant d'établir le caractère d'endomorphisme de l'application  $f \mapsto f''$  sur l'espace  $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  – traitée par quasiment tous les candidats – a été un point d'achoppement pour 30 % d'entre eux.

Quant au second point, le jury relève de nombreuses erreurs et approximations dans des manipulations élémentaires (à ce niveau d'études scientifiques), comme les calculs de dérivée (question **Q4**), de primitive (questions **Q3**, **Q6**), les calculs de rang pour des matrices de petite taille (questions **Q8**, **Q9**) ou lacunaires (questions **Q18**, **Q27**) ou encore la résolution d'équations différentielles élémentaires (**Q2**). Certains interdits sont assez largement enfreints par les candidats, parmi lesquels les comparaisons entre nombres complexes (questions **Q3**, **Q4**) et les simplifications abusives par des matrices (question **Q19**).

Cette année encore, le soin apporté à la qualité des réponses est un facteur plus décisif dans les résultats finaux que la quantité de questions traitées.

## 2.3. Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux candidats

Ce sujet se caractérise par la grande variété des questions en termes de niveau de difficulté et de notions abordées.

Le jury a relevé un certain nombre de points généraux dans la correction des copies et en tire les recommandations suivantes.

- Le jury note des faiblesses importantes et largement répandues sur des points de cours élémentaires. Le rappel et la vérification, avec organisation et méthode, des hypothèses du théorème  $C^1$  pour les intégrales à paramètres, en question **Q4**, est un point de discrimination important parmi les copies. L'évocation soignée du théorème spectral en question **Q17**, et son utilisation éventuelle dans les questions **Q9** et **Q10**, posent des problèmes importants aux candidats. Le jury constate également un manque de méthode assez répandu dans les démonstrations de convergence des intégrales impropres (questions **Q3**, **Q6**).
- Le jury relève des lacunes fréquentes sur des points de technique élémentaires. Le calcul de dérivée partielle attendu en **Q4** (sans confusion entre les variables  $\xi$  et  $t$ ) est un point d'achoppement pour de nombreux candidats. Il en est de même pour la résolution d'une équation différentielle d'oscillateur harmonique  $y'' + \lambda y = 0$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ , en question **Q2** : la forme des solutions et leur présentation rigoureuse échappent à la plupart des candidats. Les calculs de rang demandés dans les questions **Q8**, **Q9** et **Q18** manquent également globalement de rigueur.
- Un enchaînement de calculs ou de symboles logiques ne peut constituer une réponse à part entière. Le jury relève une proportion importante de copies présentant presque systématiquement les réponses de cette manière, avec un maniement souvent bancal des symboles logiques élémentaires (implications, équivalences en particulier), utilisés, à tort, comme des abréviations. Le jury encourage les futurs candidats à faire un plus grand effort de rédaction, à subordonner leurs calculs et enchaînements logiques à un texte constitué.
- Les variables utilisées par les candidats sont loin d'être systématiquement déclarées. Il n'est pas rare de voir apparaître des indices, des vecteurs colonnes ou des matrices, au milieu d'un raisonnement, sans en avoir constaté la moindre déclaration préalable, laissant au lecteur le soin de comprendre dans quel ensemble ces variables se trouvent, ou ce qu'elles désignent. Dès les premières questions, on voit abonder, dans les copies, pléthore d'indices  $i, n$  et de variables  $x$  dont le statut n'est pas précisé et dont la place dans le raisonnement est laissée à la libre appréciation du lecteur. Ce genre d'oubli n'est pas souhaitable.

Le jury rappelle également que les fautes d'orthographe et de français, malheureusement nombreuses dans les copies, nuisent à la qualité et à la clarté du discours et laissent au lecteur une impression négative qui peut se répercuter, consciemment ou non, sur la note finale (en plus de faire l'objet d'un malus). En particulier, les fautes d'accord, très nombreuses et quasi-systématiques dans bon nombre de copies (citons les malheureusement très fréquents « espace vectorielle » et « théorème spectrale »), interrogent quant à l'idée que certains candidats se font de la structure d'une phrase.

**Voici désormais les remarques du jury, question par question :**

**Q1** La stabilité de  $E$  par  $\ell$  est souvent oubliée. Le calcul de  $\ell(0)$  n'est pas nécessaire pour démontrer la linéarité de l'application  $\ell$ .

**Q2** Les fonctions candidates à être un vecteur propre doivent être non nulles. La non-nullité d'une fonction comme  $x \mapsto A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \sin(\sqrt{\lambda}x)$  n'est vraie que si  $(A, B) \neq (0, 0)$ .

La résolution de l'équation différentielle  $y'' + \lambda y = 0$ , avec  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ , n'est pas un point de réussite majoritaire parmi les copies. C'est pourtant une équation différentielle du second ordre à coefficients constants qu'on retrouve aussi en physique avec les oscillateurs harmoniques.

Une base se présente ici sous la forme d'un couple de fonctions. De nombreuses réponses proposent des couples sous la forme «  $(\cos(\sqrt{\lambda}x), \sin(\sqrt{\lambda}x))$  » sans les flèches d'association. Il faut faire attention à la nature des objets manipulés. Le cas  $\lambda = 0$  est rarement étudié, alors qu'il mérite une attention particulière.

**Q3** On lit malheureusement beaucoup d'inégalités impliquant des nombres complexes.

La continuité par morceaux de la fonction intégrée est rarement un point d'attention. C'est pourtant elle qui permet la mise en évidence des points en lesquels étudier la convergence d'une intégrale impropre.

**Q4** Le théorème de classe  $C^1$  des intégrales à paramètre est très rarement rappelé de manière exacte et organisée.

L'hypothèse d'intégrabilité selon  $t$  à  $\xi$  fixé est particulièrement oubliée.

**Q5** Les calculs sont plutôt bien menés, avec une réussite toutefois rarement totale.

Certaines propositions de primitive surprennent beaucoup ( $t \mapsto -\frac{1}{2t}e^{-t^2}$  n'est pas une primitive de  $t \mapsto e^{-t^2}$  sur  $\mathbb{R}$ ).

On rappelle la nécessité de justifier la convergence du terme de crochet lorsqu'on effectue une intégration par parties sur une intégrale impropre.

**Q6** Comme en **Q3**, il ne faut pas oublier de mentionner la continuité des fonctions intégrées. Par ailleurs, le jury rappelle que l'énoncé admet des convergences qui peuvent directement être utilisées pour accélérer la résolution de la question. Beaucoup de candidats n'y ont pas pensé. Quant au calcul des intégrales, le jury s'étonne des nombreuses propositions aboutissant à des intégrales nulles.

**Q7** Question peu traitée. Les copies ayant réussi **Q6** parviennent en général à proposer une réponse aboutie.

**Q8** Évoquer les relations de liaison entre colonnes (ici  $C_1$  et  $C_4$ , puis  $C_2$  et  $C_3$ ) ne suffit pas. Il faut encore noter que les colonnes  $C_1$  et  $C_2$  sont linéairement indépendantes pour conclure quant au rang de  $L_B$ .

**Q9** Si un polynôme  $P \in \mathbb{C}[X]$  annule une matrice  $A$ , alors le spectre de  $A$  n'est qu'inclus dans l'ensemble des racines de  $P$ . Trop de copies ont exprimé une égalité (non justifiée) entre ces deux ensembles.

On rappelle qu'une inclusion  $\subset$  n'est pas une appartenance  $\in$ .

**Q10** La symétrie de la matrice  $B$  est un argument nécessaire pour conclure. On rappelle qu'une matrice symétrique positive n'est pas une matrice symétrique dont tous les coefficients sont positifs.

**Q11** Beaucoup de candidats pensent, à raison, au contre-exemple de la matrice  $B$  pour traiter la seconde partie de la question.

**Q12** Le calcul demandé, plutôt classique, est bien réussi.

**Q13** Peu de calculs aboutis ou corrects, malgré la proximité avec la question précédente.

Dans cette question, il s'agit de démontrer un résultat qui est donné dans l'énoncé de la question. Face à l'important nombre de démarches peu intègres, le jury rappelle aux candidats qu'il est

attendu un soin particulier dans le raisonnement pour que la réponse proposée soit considérée comme valable.

**Q14** Il ne faut pas oublier l'argument de symétrie de la matrice  $L_A$  pour pouvoir utiliser la positivité de l'expression vue en **Q13**.

**Q15** On note très peu de propositions pertinentes pour cette question.

**Q16** Le volet concernant la propriété  $\Gamma$  aura connu un peu plus de succès qu'à la question précédente, mais cela reste rare.

**Q17** Le théorème spectral est rarement explicité dans cette question : il s'agit pourtant d'un point de passage important pour conclure. L'inégalité stricte entre  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  est un autre point important de la question qu'il convient de considérer avec rigueur.

**Q18** L'étude du spectre de  $L_A$  aura posé beaucoup de problèmes, tant pour la détermination des valeurs propres que pour la dimension des sous-espaces propres associés.

**Q19** Le calcul permettant l'encadrement de  $\sigma_S^2(x)$  est très peu réussi. Seule la démonstration du point (i) aura recueilli un certain succès. L'organisation du raisonnement au point (ii) (en deux implications distinctes) aura posé beaucoup de problèmes. C'est sur cette question que les bonnes et très bonnes copies se distinguent.

**Q20** De bonnes propositions, dans l'ensemble.

**Q21** L'unicité du point d'intersection mentionné est très rarement un point d'attention dans les copies.

**Q22 à Q26** Questions peu abordées dans l'ensemble.

**Q27** L'importance de l'hypothèse  $\alpha \neq 0$  dans le calcul de rang demandé est très peu considérée. Et pourtant, elle est une clé du raisonnement développé dans cette dernière partie.

**Q28** Le premier calcul de discriminant est abordé, rarement le second.

**Q29** Question très peu abordée dans l'ensemble.

**Q30** La structure d'espace vectoriel est souvent abordée, mais on voit très peu de propositions concernant le reste de la question.

**Q31 à Q35** Questions très peu abordées dans l'ensemble.

## 2.4. Conclusion

Il est absolument primordial de se présenter à une épreuve de ce niveau avec une connaissance précise des éléments de cours et une capacité à les manier avec précision et rigueur. Il est également attendu des candidats un certain niveau de maîtrise technique sur des points considérés comme élémentaires à ce niveau d'étude, en termes de dérivation, d'intégration, de résolution d'équations différentielles élémentaires, de calculs de rang en petite taille, etc.

Il est également important d'apporter une attention particulière à ce qui semble être considéré par de nombreux candidats – à tort – comme des détails : déclaration des variables, utilisation pertinente des liens logiques (implications, équivalences) et des mots de liaison. Il importe également que les candidats sélectionnent et mentionnent explicitement la totalité des arguments nécessaires pour répondre à chaque question et organisent leur raisonnement avec méthode. Un soin tout particulier doit être apporté à l'énonciation et à la vérification des hypothèses dans les

théorèmes en comportant plusieurs, comme ici le théorème  $C^1$  pour les intégrales à paramètres. Ce manque de rigueur explique que de nombreux candidats risquent de se retrouver déçus par leur note, ayant eu l'impression de traiter de nombreuses questions du sujet, alors que la plupart des réponses sont incomplètes ou insuffisamment précises.

Le jury tient également à rappeler l'impact significatif d'une copie bien présentée, rédigée dans un français correct. Il en a été tenu compte dans la notation. Les désagréments impliqués par un manquement à ces règles d'usage sont doubles :

- sur le fond, un certain manque de soin ou une rédaction précipitée fait manquer des points importants de la question ou certaines étapes cruciales d'un raisonnement ;
- sur la forme, l'impression laissée au correcteur par une copie négligée est forcément négative. Pour éviter tout désagrément, le jury recommande aux candidats de soigner leur écriture, de limiter les ratures, d'éviter de multiplier les insertions plus ou moins lisibles ou les renvois vers une autre page, et d'écrire dans un français correct.

Enfin, il n'est pas nécessaire de se précipiter et de traiter un nombre impressionnant de questions pour obtenir un très bon résultat : il suffit de procéder avec soin, dans un esprit scientifique empreint de rigueur, de discernement et de précision. Le jury encourage les futurs candidats à prendre ces bonnes habitudes dans leur préparation. Les bonnes et très bonnes copies sont, presque sans exception, de cette sorte.