

Composition de Mathématiques – B, Filière MP (X)

1 Présentation du sujet

Le sujet de l'épreuve de Mathématiques B de l'année 2025 porte sur quelques problèmes classiques d'approximation. Il traite de polynômes interpolants pour les fonctions de classe C^∞ , de bases orthogonales dans des espaces de polynômes, il étudie une fonction génératrice spécifique et son DSE dans ce contexte. Ensuite, on y donne des applications de cette construction à l'étude de fonctions absolument monotones et de fonctions de type positif (cf. la p. 2 de ce rapport pour la discussion de ces notions).

Le sujet comporte quatre parties, largement indépendantes, qui balaien une vaste partie du programme de MP-MPSI.

La première partie est donc consacrée à l'interpolation de fonctions par des polynômes. Soit f une fonction indéfiniment dérivable sur un intervalle $[a, b]$. Plus précisément, on considère ici des points t_i de $[a, b]$ avec des multiplicités k_i et on demande que les dérivées de la fonction f et celles de son polynôme interpolateur Q coïncident jusqu'à l'ordre $(k_i - 1)$, c'est-à-dire :

$$Q^{(k)}(t_i) = f^{(k)}(t_i), \quad k = 0, \dots, k_i - 1, \quad i = 1, \dots, m. \quad (1)$$

L'originalité des questions de la Partie I du sujet par rapport à l'interpolation de Lagrange réside dans le fait que, pour l'interpolation de Lagrange, $k_i = 1$, $i = 1, \dots, m$. Par conséquent, les techniques de l'interpolation vues au programme devaient être convenablement adaptées à ce cas plus général (et bien plus technique). D'une manière assez classique, on encode l'information sur les points t_i et les multiplicités k_i en considérant le polynôme

$$P(X) = \prod_i (X - t_i)^{k_i}.$$

On montre l'existence et l'unicité d'un polynôme $H(f, P)$ de degré strictement inférieur à la somme des k_i avec les propriétés (1). Ensuite, on définit la fonction

$$Q(f, P)(X) = \frac{f(X) - H(f, P)(X)}{P(X)},$$

et on montre que cette fonction est encore indéfiniment dérivable. La conclusion de cette partie est que si f est absolument monotone, alors il en est de même de $Q(f, P)$.

Les questions de cette partie demandent de faire appel au théorème de Rolle, à la formule de Taylor avec reste intégral, au théorème de convergence dominée pour régularité d'une fonction définie par une intégrale à paramètre, à des éléments d'algèbre linéaire (par exemple, le fait qu'une application linéaire injective entre espaces vectoriels de même dimension finie est aussi surjective), et un peu d'arithmétique (euclidienne) des polynômes.

La Partie II du sujet étudie l'espace euclidien $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni d'un produit scalaire à poids

$$\langle P, Q \rangle_f = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)f(t)dt,$$

où la fonction f est strictement positive et continue. On suppose qu'il existe un polynôme unitaire D de degré n ayant n racines distinctes $r_n < \dots < r_1$ dans l'intervalle $[a, b]$ et orthogonal au sous-espace $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ pour $\langle \cdot, \cdot \rangle_f$. Le but de cette partie est de construire une base orthogonale échelonnée en degré $\mathcal{B} = (a_0, \dots, a_n)$ de $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_f)$ telle que les coordonnées de D dans cette base \mathcal{B} sont strictement positives.

La construction de la \mathcal{B} est subtile et inductive. Elle passe par la construction d'une base orthogonale échelonnée en degré de $\mathbb{R}_{n-j-1}[X]$ pour un certain produit scalaire modifié $\langle \cdot, \cdot \rangle_{ff_j}$ pour tout $j = 0, \dots, n-1$. Ici f_j est le polynôme unitaire dont les j plus grandes racines sont les j plus grandes racines de D .

Cette partie, assez longue et relativement classique, aborde des notions devant être familières aux candidats : le produit scalaire, la géométrie d'un espace euclidien, les polynômes orthogonaux, l'orthonormalisation de Gram-Schmidt et ses variantes, le phénomène d'entrelacement des racines de polynômes orthogonaux, etc. Certaines questions se traitent par récurrence, celle de la dernière question de la partie étant particulièrement sophistiquée.

Dans la Partie III du sujet, on fixe un réel $\lambda > 1/2$ et on étudie l'espace euclidien $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_f$, avec

$$f(x) = (1 - x^2)^{\lambda - 1/2}.$$

On construit une base orthogonale de cet espace à l'aide du développement en série entière (= DSE), en la variable r , de la fonction génératrice

$$F_\lambda(x, r) = (1 - 2rx + r^2)^{-\lambda}.$$

Les compétences requises ici sont la manipulation des séries entières (*i.e.*, les développements standards, le rayon de convergence, les substitutions élémentaires dans les SE, l'unicité des coefficients, etc.), le lemme de Schwarz pour les fonctions de deux variables et l'intégration par parties.

La dernière partie étudie les fonctions de type positif en dimension N . Rappelons que la matrice $M = (x_i \cdot x_j)_{1 \leq i, j \leq N}$ est symétrique positive pour tout N -uplet (x_1, \dots, x_N) de vecteurs de norme égale à un. Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite de *type positif en dimension N* si pour toute telle matrice $M = (x_i \cdot x_j)$ la matrice $(f(x_i \cdot x_j))_{1 \leq i, j \leq N}$ est encore positive. Une fonction indéfiniment différentiable est dite absolument monotone sur un intervalle $[a, b]$ si toutes ses dérivées sont positives sur cet intervalle.

Cette même partie du sujet donne des constructions pour produire des fonctions de type positif en dimension N . Elle commence par quelques résultats sur le cône des matrices symétriques positives, comme sa stabilité par le produit de Hadamard \odot (aussi appelé le produit de Schur, ou bien encore celui de Kronecker). On montre ensuite que les polynômes de Tchebychev sont de type positif en dimension 2. On exploite enfin les parties précédentes pour produire des fonctions de type positif en chaque dimension N .

Cette partie requiert l'utilisation du théorème spectral et pas grand-chose d'autre, sauf peut-être une certaine ingéniosité.

2 Conseils généraux pour les candidats

Les correcteurs soulignent qu'il est préférable de s'attacher à traiter correctement plusieurs questions consécutives et parmi elles des questions difficiles, plutôt que d'essayer de survoler toutes les

parties et de tenter de “grappiller” des points sur les questions faciles. Le barème est établi de sorte qu'une telle stratégie est finalement peu rentable. Il est par contre tout à fait autorisé de “sauter” une question que l'on ne serait pas parvenu à résoudre, puis d'en utiliser le résultat dans la suite. Il faut alors veiller à ne pas oublier de vérifier soigneusement toutes les hypothèses requises pour appliquer ces “boîtes noires”.

Le soin apporté à l'écriture et la présentation est trop souvent insuffisant et c'est un phénomène qui semble s'aggraver. Cela peut parfois poser un réel problème aux correcteurs. Nous rencontrons trop de copies remplies de ratures ou parfaitement illisibles du fait d'une graphie microscopique ou indéchiffrable. Dans les cas où, malgré tous nos efforts, certaines parties du texte restent incompréhensibles, les points ne sont pas attribués. Nous rappelons aux candidats que l'usage d'un brouillon est indispensable afin de ne présenter sur sa copie que les étapes essentielles d'un raisonnement ou d'un calcul et de ne pas y faire figurer des arguments faux ou trop incomplets. Nous conseillons aux candidats d'évacuer leur stress et de traiter plusieurs questions au brouillon avant de se lancer dans la rédaction au propre. Nous proposerons que dans les épreuves futures, un petit quota de points du barème au départ soit réservé pour l'évaluation de la rédaction et du soin de la copie. Un signe de maturité mathématique du candidat apprécié par les correcteurs est le bon dosage entre concision et précision des réponses. On constate, surtout dans les premières questions du sujet (cf. les questions 1a-2b) une rédaction très lourde, et à la fin des copies, au contraire, des arguments sommaires jetés « au petit bonheur la chance ». Ajoutons que même les vérifications triviales (par exemple, la condition de bilinéarité dans la définition d'un produit scalaire) doivent être évoquées, rapidement, ne serait-ce que pour montrer que les définitions sont bien connues et assimilées par le candidat.

3 Indications sur le barème et statistiques générales

Les résultats de l'épreuve sont en accord avec les directives statistiques générales du concours, ce qui garantit l'influence respective convenable des différentes épreuves.

Voici les tableaux de statistiques pour les épreuves écrites Maths B des filières MP et MPI, respectivement.

| | MP | MPI |
|------------------|------|-----|
| Nombre de copies | 2015 | 291 |

Statistiques des épreuves, nombres de copies par filière MP ou MPI.

| | Toutes filières | MP | MPI |
|-------------|-----------------|------|------|
| Toutes nat. | 9,50 | 9,52 | 9,34 |
| Française | 9,80 | 9,84 | 9,54 |
| Autres nat. | 8,46 | 8,52 | 7,43 |

Statistiques des épreuves, moyennes par filière MP ou MPI.

| | Toutes filières | MP | MPI |
|-------------|-----------------|------|------|
| Toutes nat. | 3,82 | 3,81 | 3,89 |
| Française | 3,73 | 3,71 | 3,83 |
| Autres nat. | 3,93 | 3,92 | 4,02 |

Statistiques des épreuves, écarts-types par filière MP ou MPI.

En général, nous pouvons constater (avec une certaine satisfaction) le maintien du niveau des résultats des épreuves écrites de Mathématiques B par rapport aux années antérieures.

Un bon nombre de copies sont rédigées de manière convenable et montrent un savoir-faire et des connaissances solides. Il nous semble que le niveau des candidates et candidats qui se retrouvent admissibles au concours est stable.

Enfin, le sujet de l'épreuve de cette année est standard, pour ne pas dire classique ; il est de même niveau de difficulté que les sujets d'années antérieures.

4 Examen détaillé des questions

Ce qui suit n'est pas un corrigé de l'épreuve mais une liste de commentaires des correcteurs sur chaque question. Les statistiques données portent sur le total (sans distinction) des options MP et MPI.

4.1 Première Partie

Question 1.a Il s'agit de voir que en dérivant, on perd un ordre d'annulation en chaque t_i , soit m au total, et que le théorème de Rolle fournit $m - 1$ autres points d'annulation, soit une perte finale de la multiplicité de un. La rédaction ci-dessus serait presque acceptable, il semble donc exagéré d'y consacrer une page, voire plus. Au passage, notons que « Rolle » devient parfois « Rolles » ou même « Rholles ».

Taux de réussite - 61 %.

Question 1.b C'est une conséquence immédiate de la première question, il semble de même exagéré d'y consacrer plus de quelques lignes en formalisant des récurrences encombrantes.

Taux de réussite - 82 %.

Question 2a Ici, il s'agit d'un problème de divisibilité de polynômes. Les correcteurs ont attribué les points aux candidats qui affirment que puisque P est scindé et que Q s'annule en toutes les racines de P avec un ordre d'annulation au moins égal à celui de P , alors P divise Q , puis concluent en comparant les degrés de ces polynômes.

Taux de réussite - 88 %.

Question 2b Ceci est la première question fine de la Partie I. Le candidat devait avoir l'idée d'introduire l'application linéaire pertinente, puis de démontrer sa surjectivité en montrant son injectivité et en utilisant l'égalité des dimensions des espaces de départ et d'arrivée.

Taux de réussite - 16 %.

Question 3a La formule de Taylor avec reste intégral fait partie du programme de MP-MPSI et elle doit être bien connue. Certains préfèrent repartir de zéro et démontrer la formule voulue par une suite d'intégration par parties.

Taux de réussite - 69 %.

Question 3b Cette question est composée de plusieurs sous-questions. La première partie de la question consiste à utiliser la formule de la question 3a pour montrer que la fonction $Q(f, P)$ se prolonge par continuité aux points t_i , $i = 1, \dots, m$. Dans le deuxième temps, il convient de montrer que $Q(f, P)$ est une fonction de classe C^∞ sur l'intervalle $[a, b]$ à l'aide du théorème de dérivation par rapport à un paramètre sous le signe d'intégrale.

Taux de réussite - 32 %.

Question 4a Cette question découle facilement de la question 3a, lorsque l'on y pose $P(X) = (X - s_0)^n$, et ensuite on calcule la fonction $Q(f, P)$ au point $X = s_0$.

Taux de réussite - 57 %.

Question 4b Ceci est une question difficile; sa bonne rédaction requiert la bonne maîtrise des questions 2a-3b. En utilisant l'unicité du polynôme interpolateur vérifiée à la question 2a., on vérifie les conditions d'interpolation « multiple » aux points $t_i = 1, \dots, m$, pour montrer que

$$H(f, P_1 P_2) = H(f, P_1) + P_1 H(Q(f, P_1), P_2).$$

La deuxième relation de cette question s'obtient facilement de cette première.

Peu de candidats ont réussi à donner une réponse satisfaisante à cette question. Taux de réussite - 32 %.

Question 5a Il s'agit de vérifier l'égalité $Q_t(s) = 0$ aux points $s = t_i$, $i = 1, \dots, m$ (en prenant en compte la multiplicité k_i), et au point $s = t$.

Taux de réussite - 23 %.

Question 5b C'est une application directe de la question 4a à la fonction $Q_t(s)$.

Cette question a été plutôt bien rédigée par les candidats. Taux de réussite - 22 %.

Question 6 Ceci est encore une question difficile. Certains montrent que $Q(f, P)^{(\deg P)} \geq 0$. Cela ne suffit pas pour conclure sur l'absolue monotonie de la fonction $Q(f, P)$, car cette condition requiert que $Q(f, P)^{(n)}$ soit positive pour tout $n \geq 0$.

La question a été très peu abordée. Taux de réussite - 0 %.

4.2 Deuxième Partie

Question 7a La solution qui paraît la plus naturelle aux correcteurs est de se placer dans le dual de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, isomorphe à \mathbb{R}^n , et de dire que les évaluations en n points distincts forment une base de celui-ci, en le justifiant. Le programme de MP-MPSI étant assez modeste sur l'utilisation de la dualité, il semblerait que les candidats aient appris à contourner cette difficulté par des méthodes diverses (*i.e.*, l'utilisation des polynômes de Lagrange qui forment une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, l'usage d'un déterminant de Vandermonde, introduction d'un produit scalaire donné par les évaluations, ... ce qui revient au même résultat bien sûr).

Taux de réussite - 35 %.

Question 7b La question est sans difficulté particulière à condition de suivre les indications et d'utiliser la question 7a.

Taux de réussite - 74 %.

Question 7c Ceci est un calcul direct.

Taux de réussite - 77 %.

Question 7d Cette question est encore composée de plusieurs sous-questions. La vérification des propriétés de symétrie et de bilinéarité du produit scalaire est triviale. La démonstration de la positivité et du caractère défini de ce produit demande la preuve de positivité des valeurs $f_j(r_i)$, $i = 1, \dots, n - j - 1$, $j = 0, \dots, n - 1$.

Taux de réussite - 37 %.

Question 8a Il s'agit d'une légère variation du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. On part de la base standard (ou bien, une base échelonnée en degrés) de $\mathbb{R}_{n-j-1}[X]$, et on se contente de l'orthogonaliser. L'unicité de la base unitaire obtenue se montre par récurrence.

Taux de réussite - 54 %.

Question 8b La question est relativement simple. Pour montrer l'orthogonalité en question, il suffit d'observer que $f_j q_{n-j} = (-1)^j D$. L'unicité du polynôme unitaire q_{n-j} découle du fait qu'il doit appartenir à un sous-espace de $\mathbb{R}_{n-j}[X]$ de dimension une.

Taux de réussite - 26 %.

Question 9a Cette question est classique et standard. Il s'agit de chercher la représentation du vecteur $q_i - Xq_{i-1} \in \mathbb{R}_{i-1}[X]$ sous la forme

$$q_i - Xq_{i-1} = \sum_{k=0}^{i-1} \alpha_k q_k,$$

le reste découle des relations d'orthogonalité démontrées précédemment.

Taux de réussite - 12 %.

Question 9b Immédiat d'après la question précédente.

Taux de réussite - 53 %.

Question 9c Il suffit d'observer que

$$\langle Xq_{i-1}, q_i \rangle_j = \langle q_i, q_i \rangle_j = \|q_i\|_j^2 > 0.$$

Taux de réussite - 7 %.

Question 10a Question triviale d'après la question 8a.

Taux de réussite - 41 %.

Question 10b Cette question, plus sophistiquée, porte sur la propriété d'entrelacement des racines des polynômes orthogonaux consécutifs. On procède par récurrence en utilisant la relation de la question 9b, *i.e.*,

$$q_i - Xq_{i-1} = a_i q_{i-1} + b_i q_{i-2},$$

la question 10a en sert d'initialisation.

Il y est important d'utiliser la relation inductive « à trois termes », car les relations d'orthogonalité « initiales » entre les q_i , $i = 0, \dots, n-j$, ne mènent pas au résultat voulu.

Taux de réussite - 6 %.

Question 10c La réponse à cette question s'ensuit de la construction de la question précédente et du TVI.

Taux de réussite - 7 %.

Question 11a Pour $0 \leq \ell \leq i$, on observe que

$$\frac{q_\ell - q_\ell(r_{j+1})}{X - r_{j+1}} \in \mathbb{R}_{\ell-1}[X],$$

et $\ell-1 < i$, d'où le résultat par l'orthogonalité de q_i, q_{i-1} à ce dernier espace.

Taux de réussite - 6 %.

Question 11b Ici, on réécrit le produit scalaire de la question précédente comme

$$\langle p_i, q_\ell - q_\ell(r_{j+1}) \rangle_j = 0,$$

et on le calcule soigneusement en utilisant le développement donné $p_i = \sum_{k=0}^i c_k q_k$.

Cette question a été réussie par un très faible nombre de candidats. Taux de réussite - 3 %.

Question 12 La question est un calcul immédiat à condition de se souvenir des définitions de produits scalaires $\langle \cdot, \cdot \rangle_j$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle_{j+1}$ (cf. la définition devant la question 7d).

Taux de réussite - 2 %.

Question 13 Cette question difficile fait la synthèse de la totalité des résultats obtenus en Partie II du sujet. Sa résolution a été tentée par très peu de candidats.

Pour $0 \leq j \leq n - 1$, posons $(q_{j,0}, \dots, q_{j,n-j})$ la base orthogonale unitaire de $\mathbb{R}_{n-j}[X]$ obtenue dans les questions 8a, 8b. Pour montrer que les coefficients du développement du polynôme

$$q_{j,n-j}(X) = q_{n-j}(X) = \prod_{\ell=j+1}^n (X - r_\ell)$$

sont positifs, on effectue une récurrence descendante par rapport à k , $0 \leq k \leq j$, en passant aux familles $(q_{k,0}, \dots, q_{k,n-j})$, tout en s'aidant des questions 10c et 12.

Taux de réussite - 0 %.

4.3 Troisième Partie

Question 14 D'une manière surprenante, cette question simple a posé beaucoup de difficultés à bien des candidats. Le fait à vérifier, avant tout, était de voir que

$$1 - 2rx + r^2 > 0$$

pour $r, x \in]-1, 1[$; ensuite, par la composition d'applications de classe C^∞ , on obtenait que la fonction $F_\lambda(x, r)$ est bien définie (et donc de classe C^∞) sur $] -1, 1[^2$. Certains candidats affirmaient juste que $1 - 2rx + r^2 \neq 0$, ce que ne permettait pas de conclure.

Taux de réussite - 31 %.

Question 15 Ceci est encore une question simple qui a bien donné du fil à retordre à beaucoup de candidats ; vraisemblablement, les difficultés à la rédaction de la solution de cette question s'expliquent par le fait que les séries entières, DSE, et les techniques correspondantes sont abordées d'une façon tangente au programme de MP-MPSI.

Il convenait ici de donner le DSE *explicite* pour

$$f_\lambda(y) = (1 + y)^{-\lambda}, \quad \lambda > 0,$$

de préciser que le rayon de convergence de cette SE est $R = 1$, et de faire une substitution $y = -2rx + r^2$.

A la place, plusieurs candidats affirmaient que la réponse découlait de la question précédente, ce qui est faux (*e.g.*, on peut donner des fonctions de classe C^∞ , qui n'admettent pas de DSE en un point).

Taux de réussite - 6 %.

Question 16a Il fallait ici donner une équation différentielle qui relie $\partial F_\lambda / \partial r$ et F_λ , faire le DSE des deux côtés de l'égalité et utiliser l'unicité des coefficients des DSE ainsi obtenus.

En général, cette question a été bien traitée ; taux de réussite - 26 %.

Question 16b Cette question se fait par une récurrence immédiate à l'aide de la question précédente.

Taux de réussite - 21 %.

Question 17a Application directe d'un résultat du cours qui fait le lien entre un coefficient du DSE de $F_\lambda(x, r)$ et sa dérivée (partielle) n -ième.

Taux de réussite - 23 %.

Question 17b Il s'agit de calculer $\partial F_\lambda / \partial x$, faire le DSE (par rapport à r), et, comme auparavant, d'utiliser l'unicité des coefficients correspondants.

Taux de réussite - 10 %.

Question 17c C'est une question sans difficulté particulière ; il y convenait de calculer l'intégrale à l'aide d'une IPP, et l'interpréter en termes du produit scalaire.

Taux de réussite - 3 %.

Question 17d Mis à part la récurrence sur $a_n^{(\lambda)}$, $n \geq 1$, la question est en tout point semblable à la question précédente.

Taux de réussite - 2 %.

Question 17e Cette question est techniquement un peu plus difficile que les questions 17c et 17d ; néanmoins, elle se fait dans le même état d'esprit. À l'aide d'IPP et d'une récurrence, on y montre que

$$\langle a_n^{(\lambda)}, X^k \rangle = 0, \quad k = 0, \dots, n - 1.$$

Taux de réussite - 0 %.

4.4 Quatrième Partie

Les questions de cette partie se basent, en grande partie, sur le théorème spectral pour des matrices symétriques et la multiplication de Hadamard de matrices. Bien qu'étant assez originale, cette dernière notion est aisée à manipuler.

Question 18a Immédiat.

Taux de réussite - 48 %.

Question 18b Immédiat.

Taux de réussite - 42 %.

Question 18c Cette question est une réécriture du théorème spectral pour une matrice symétrique $M \in S_n^+$.

Taux de réussite - 25 %.

Question 18d Ici, on écrit les matrices $A, B \in S_n^+$ « selon la question précédente », et on obtient le résultat après « une symétrisation » du produit d'Hadamard $A \odot B$.

Taux de réussite - 10 %.

Question 18e Immédiat d'après la question précédente et la définition d'une fonction du type positif en dimension N .

Taux de réussite - 13 %.

Question 19 Cette question est plutôt astucieuse. Partant de $(x_k)_{k=1,\dots,m} \subset (S^1)^m$, on écrit $x_k = e^{i\theta_k}$, $k = 1, \dots, m$, et on observe que

$$M = (x_k \cdot x_j) = (\cos(\theta_k - \theta_j)), \quad k, j = 1, \dots, m.$$

le reste s'ensuit facilement.

Taux de réussite - 1 %.

Très peu de candidats ont abordé les questions suivantes.

Question 20 La réponse à cette question découle de la définition d'un polynôme N -conductif et des questions 4b, 6, et 18e.

Taux de réussite - 1 %.

Question 21 Cette question difficile se fait par la récurrence descendante (par rapport à j) sur le polynôme

$$P_j(X) = \prod_{i=j+1}^n (X - r_i), \quad j = 0, \dots, n - 1,$$

à l'aide des questions 16b, 17e, 13 et de la question précédente.

Taux de réussite - 0 %.