

## RAPPORT MATHS A 2025

### 1. COMMENTAIRES GÉNÉRAUX

Le sujet de cette année commençait par la classification des endomorphismes nilpotents d'un espace vectoriel de dimension finie, à l'aide des blocs de Jordan. Il s'agit d'un résultat classique d'algèbre linéaire, et l'énoncé proposait d'utiliser l'algèbre des séries de Laurent comme outil de démonstration. La preuve de l'existence d'une décomposition en blocs de Jordan était faite par récurrence, la difficulté étant de construire un supplémentaire stable. L'unicité était quant à elle traitée à l'aide d'invariants soigneusement choisis, faisant intervenir les dimensions des noyaux des itérés successifs.

Une fois ce résultat obtenu, on prouvait une version plus forte, dite « graduée », de ce résultat. Pour cela, il était supposé que l'espace vectoriel se décomposait en une somme directe  $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_n$  tel que l'endomorphisme nilpotent noté  $u$  satisfaisait la condition  $u(V_i) \subset V_{i+1}$ . Pour ce faire, l'énoncé introduisait un endomorphisme  $h$  diagonalisable, vérifiant  $h^n = id$ , dont les  $V_i$  étaient les espaces propres et vérifiant une certaine relation avec  $u$ . Là encore, on construisait la décomposition par récurrence, la difficulté étant cette fois-ci de produire un supplémentaire stable simultanément par  $u$  et par  $h$ .

Deux applications étaient ensuite proposées. La première était la classification des endomorphismes  $u$  de  $V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$  vérifiant  $u(V_1) \subset V_2$ ,  $u(V_2) \subset V_3$  et  $u(V_3) = 0$ . On se ramenait pour cela à la situation précédente en introduisant un espace  $V_4$  réduit à  $\{0\}$ . La partie précédente permettait alors de construire 6 blocs élémentaires. De plus, le nombre de chacun de ces blocs apparaissant dans la décomposition était obtenu simplement à l'aide des dimensions des sous-espaces  $V_i$  et des restrictions de  $u$  à  $V_1$  et  $V_2$  respectivement.

La seconde application était la classification à équivalence près des couples d'applications linéaires  $u : V \rightarrow W$  et  $v : W \rightarrow V$ , où  $V$  et  $W$  sont deux espaces vectoriels de dimension finie. L'énoncé montrait comment se ramener à traiter deux cas séparément, à savoir le cas où une certaine matrice associée au problème était inversible, puis le cas où celle-ci était nilpotente, puis demandait ensuite d'utiliser ce qui avait été fait précédemment pour résoudre chacun des deux cas.

Les questions du sujet étaient bien posées et précises, et les réponses attendues, sans être évidentes, ne nécessitaient en général pas de rédactions complexes de plusieurs pages ni des calculs fastidieux. Elles nécessitaient d'intégrer les notations proposées par l'énoncé ainsi que les différents résultats obtenus au cours du sujet. Le jury tient d'ailleurs à préciser que l'utilisation de résultats de questions antérieures nécessite de faire une référence précise à la fois à la question et au résultat utilisé. Une formulation vague du type « d'après les résultats précédents » ou encore « d'après les résultats de la partie 1 » n'est pas suffisamment précise pour être valorisée.

Le sujet était très long, et la partie 6 n'a quasiment jamais été traitée (à l'exception d'une ou deux questions faciles), de même que la question 14. Il n'était donc pas nécessaire de traiter le sujet dans sa totalité pour avoir une excellente note. En revanche, la rédaction des questions traitées devait être rigoureuse pour avoir la totalité des points.

Si le niveau global des copies est satisfaisant, nous avons constaté certaines erreurs très problématiques. Nous avons ainsi observé de nombreuses lacunes concernant l'algèbre des polynômes d'un endomorphisme. Il a par exemple été affirmé que si  $P, Q$  sont deux polynômes,  $u$  un endomorphisme et  $v$  un vecteur, alors  $(PQ)(u)(v)$  était égal à  $P(Q(u)(v))$  ou à  $P(u)(v)Q(u)(v)$ , sans qu'un sens soit cherché pour ces quantités. De même, nous avons assisté plusieurs fois à une confusion entre l'idéal engendré par un polynôme, et le sous-espace vectoriel engendré par celui-ci.

Rappelons enfin, comme chaque année, quelques recommandations importantes. Nous insistons sur l'importance d'une rédaction rigoureuse et soignée, ainsi que sur une mise en valeur claire de la structure de la copie (numérotation des questions et présentation adéquate des résultats). De plus, un soin minimal et une écriture lisible sont attendus. Notons également que, si la pondération des questions est généralement proportionnelle à leur difficulté, il est absolument nécessaire de prendre le temps de fournir une rédaction correcte des réponses données, y compris pour les résultats élémentaires. La stratégie consistant à survoler le sujet en ne répondant qu'aux questions les plus simples ne peut pas aboutir à une note correcte.

## 2. EXAMEN DÉTAILLÉ DES QUESTIONS

### Partie 1.

1. Nous avons trop souvent été confrontés à des raisonnements erronés sur cette question. Le plus rapide était d'introduire le polynôme minimal de  $h$ . D'autres démonstrations étaient possibles, mais il fallait être très rigoureux.

2abc. Questions qui n'ont pas posé de difficulté, et qui ont été globalement bien traitées.

### Partie 2.

3a. Question bien traitée.

3b. Il était nécessaire de bien écrire la récurrence pour calculer les itérés de l'endomorphisme  $\xi$ .

4. et 5. Questions qui n'ont pas posé de difficulté, mais une rédaction rigoureuse était attendue.

### Partie 3.

6a. Question qui n'a pas posé de difficulté, à condition de connaître la définition d'un idéal et de ne pas se tromper dans les manipulations de l'algèbre de polynômes d'un endomorphisme.

6b. Le résultat était aisément obtenu si on utilisait le fait qu'un idéal de l'anneau des polynômes était engendré par un élément. On pouvait redémontrer ce résultat, mais cette démarche n'a pas toujours été couronnée de succès.

6c. Question bien traitée.

6d. Question qui nécessitait d'utiliser un résultat antérieur, ce qui a globalement été bien fait.

6e. Le point crucial résidait dans le fait de voir que le polynôme  $P$  devait appartenir à l'idéal introduit, et utiliser les résultats des questions précédentes. A noter qu'il fallait voir que  $Q(\xi) \circ \phi = \phi \circ Q(u_W)$  pour tout polynôme  $Q$ , ce qui a été bien fait par les candidats ayant traité cette question.

6f. Question rarement abordée par les candidats.

7. Il était nécessaire d'être rigoureux, sans nécessairement donner trop de détails superflus dans la rédaction. Une justification trop courte comme « On voit bien qu'il est possible ... » n'est pas considérée comme correcte.

#### Partie 4.

8a. Questions très bien traitées.

8b. Il était nécessaire d'être rigoureux dans la définition de la fonction  $\varphi$ .

8c. Question qui n'a pas posé de problème particulier.

8d. Il fallait être rigoureux pour prouver chacune des assertions.

9. Un raisonnement par récurrence était attendu, et il fallait être rigoureux sur la rédaction.

10. Pour ceux qui ont traité cette question, l'indication de l'énoncé a été suivie. Il fallait encore une fois être rigoureux dans la rédaction.

#### Partie 5.

11a, 11b, 11c. Question bien traitée et qui n'a pas posé de problème particulier.

12a. Question bien traitée.

12b. Question qui n'a pas posé de problème pour les candidats l'ayant traitée.

12c. Question plus subtile, qui n'a pas toujours été abordée correctement.

12d. Question qui supposait de mener à bien les calculs en utilisant les résultats précédents.

12e. Question qui ne comportait pas de difficulté particulière, mais qui a été peu traitée.

13a. Peu de candidats sont arrivés à cette question, qui n'était pas particulièrement difficile.

13b. De nombreux points étaient à vérifier dans la question, qu'il fallait traiter par récurrence. Pour l'initialisation, il fallait montrer soigneusement que les matrices de  $u$  et  $h$  avaient la forme demandée. Pour établir l'hérédité, il fallait expliquer comment toutes les questions précédentes permettaient de construire un supplémentaire stable par  $u$  et  $h$ , auquel on pouvait appliquer l'hypothèse de récurrence. Peu de candidats ont eu le temps de traiter cette question.

14abc. Ces questions n'ont quasiment jamais été traitées.

**Partie 6.**

Cette partie n'a été que rarement abordée par les candidats. Certains ont néanmoins commencé à traiter les questions 15 et 16, de manière incomplète.