1 Mathématiques

1.1 Remarques générales et conseils

Nous incitons les candidats à apprendre leur cours de mathématiques de première et de deuxième année en profondeur, de manière à maîtriser les notions et les théorèmes du programme. Nous leur conseillons également de s'entraîner intensivement au calcul, en particulier à la manipulation des inégalités.

Plusieurs erreurs relevées l'an dernier ont été commises de nouveau cette année.

Une **présentation soignée** (écriture nette, absence de ratures, résultats encadrés) dispose très favorablement le correcteur. Les correcteurs ont été étonnés par le manque de soin, beaucoup de copies ressemblent plus à un brouillon qu'à une épreuve de concours.

Les encres pâles sont encore fréquentes, et un nombre croissant de candidats a obligé les correcteurs à utiliser la loupe tant leur écriture est minuscule.

On recommande aux candidats d'employer une encre foncée, restant bien visible après numérisation. Le texte et les calculs sont souvent agrémentés de petites zones de texte coloré insérées avec des flèches par des candidats ne prenant pas la peine de rédiger une phrase pour justifier une assertion ou une expression.

Il est demandé de numéroter les copies de façon cohérente, les correcteurs n'aimant pas être confrontés à un jeu de piste.

Il est fortement conseillé d'aborder et de rédiger les questions dans l'ordre de l'énoncé.

On recommande de bien traiter une partie des questions plutôt que de produire un discours inconsistant pour chacune d'entre elles. Certaines copies obtiennent une note très faible en prétendant répondre à la quasi-totalité des questions. Nous rappelons que les questions « faciles » doivent être correctement rédigées pour être complètement prises en compte, surtout en début de problème.

La rédaction est un élément essentiel d'appréciation. Elle est en fait difficilement dissociable du fond. On attend notamment des candidats la vérification de l'existence des objets manipulés, une déclaration claire des objets utilisés, un maniement soigneux des inégalités (notamment distinction entre inégalité large et inégalité stricte). Chaque théorème utilisé doit être clairement et complètement énoncé.

La rédaction des preuves doit être courte et complète ; tous les arguments sont attendus.

Les tentatives de bluff n'apportent aucun point et préviennent très défavorablement le correcteur quant à l'ensemble de la copie.

Nous suggérons également aux candidats de se relire, de manière à éviter de laisser subsister dans leur travail des absurdités criantes (par exemple, des inégalités entre nombres complexes).

Nous soulignons également l'importance d'une lecture rigoureuse de l'énoncé, qui guide la réflexion et permet d'éviter certaines erreurs.

Les copies doivent être rédigées en Français. Les paragraphes doivent commencer à gauche de la page et non au milieu, les phrases doivent commencer par une majuscule et se terminer par un point. Quant aux connecteurs logiques $\Leftrightarrow$ et $\Rightarrow$, ce ne sont pas des marques d'inférence et ils ne doivent donc pas remplacer « donc », « ainsi », « c'est pourquoi », etc.

Les abréviations sont pléthore, au point de rendre la lecture parfois difficile en raison de l'ambiguïté qui peut en résulter : comment savoir que ISMQ signifie « il suffit de montrer que » ?

L'orthographe et la syntaxe sont souvent défectueuses ; des démonstrations par l'absurde se terminent par « donc impossible ».

Trop régulièrement les candidats redéfinissent sur leur copie les objets déjà définis par l'énoncé (par exemple ils écrivent « Soit $A = \dots$ » à la première question). Inversement, trop de candidats ne prennent pas la peine d'introduire leurs propres notations.

Beaucoup de symboles mathématiques sont utilisés comme abréviations, et certains candidats utilisent des abréviations surprenantes (dc, sq, dz, sars, ...) potentiellement inconnues du correcteur. Attention aux notations non définies dans le programme et potentiellement ambigües : par exemple, utiliser $\sim$ pour désigner la similitude entre matrices est porteur de confusion avec l'équivalence entre matrices, et la signification de cette notation doit donc être précisée dans la copie dès sa première utilisation.

1.2 Mathématiques 1 - filières MP et MPI

1.2.1 Généralités et présentation du sujet

Le problème portait sur les probabilités, en utilisant plusieurs chapitres du reste du programme, séries entières, intégration ou encore algèbre euclidienne.

Toutes les questions étaient fermées, il n'y avait donc pas de risque de se retrouver bloqué et beaucoup de candidats ont balayé l'ensemble du sujet, en sautant plus ou moins de questions.

Le sujet était un peu long, mais raisonnablement puisque quelques candidats l'ont traité en entier. Il y avait des questions difficiles, mais suffisamment de questions abordables pour permettre un étalement correct des notes. Nous avons obtenu une moyenne et un écart type satisfaisants, ce problème a donc permis de classer correctement les candidats.

La première partie portait sur l'inégalité de Hölder, avec trois questions classiques pour lesquelles on attendait une rédaction précise. Les performances sur ces questions ont été plutôt décevantes, pour les premières questions on attend une rédaction soignée et il ne faut pas oublier les cas particuliers.

Pour terminer, revenons sur la présentation des copies. Il n'y a peut-être pas d'aggravation par rapport aux années précédentes, mais les calculs avec des indices présents dans de nombreuses questions de ce problème pouvaient être carrément illisibles. Reprenons donc ce qui était dit dans les rapports des années précédentes : le bénéfice du doute n'existe pas, si on n'arrive pas à lire, ou s'il faut aller chercher les calculs au milieu de gribouillages, on met 0 à la question.

Une analyse détaillée des questions est présentée dans l'annexe A.

1.3 Mathématiques 2 - filière MP et MPI

1.3.1 Présentation du sujet

Le sujet de cette année portait sur un résultat d'algèbre appelé théorème de Schur-Cohn et utilisé dans le domaine des système dynamiques.

Il commençait par une liste de notations, certaines classiques et figurant au programme (par exemple la transposée d'une matrice qui, on le rappelle, est notée $M^\top$, et non plus t^M), d'autres nouvelles.

La première partie ne consistait qu'en des manipulations de polynômes et était abordable en première année, même s'il fallait parfois manipuler certaines sommes de façon assez fine.

La deuxième partie avait pour but d'étudier la liberté d'une famille de polynômes dans différents cas de figure. Elle aussi était abordable dès la première année, et était la partie la plus abordable, même si elle comportait tout de même une question assez difficile.

Dans une troisième partie (abordable elle aussi en première année, à part en ce qui concerne une manipulation de polynômes de matrices), on demandait de prouver la non inversibilité d'une matrice noté $J(p)$ sous une certaine hypothèse. Cette partie était assez calculatoire.

La quatrième partie utilisait le programme de réduction de deuxième année et avait pour but de démontrer le critère de Schur-Cohn annoncé en préambule. Elle était assez difficile et demandait d'être à l'aise avec la notion de vecteurs propres orthogonaux.

La cinquième partie donnait une condition nécessaire et suffisante d'inversibilité pour la matrice $J(p)$ déjà étudiée dans la troisième partie. Cette partie était assez simple car il suffisait de faire un bilan des questions précédentes.

Enfin, le sujet comportait deux autres parties, qui n'ont presque pas été abordées par les candidats.

Le sujet était très long mais le barème en a tenu compte. Certaines questions étaient assez difficiles mais de nombreuses questions étaient abordables. Néanmoins,certaines questions longues et calculatoires ont pu décourager certains candidats de regarder les questions suivantes.

Une analyse détaillée des questions est présentée dans l'annexe B.

1.3.2 Remarque sur la rédaction et la présentation des copies

Comme l'an dernier, le jury déplore une présentation de la majorité des copies, les rendant très difficiles à lire. On rappelle donc des règles élémentaires :

- Il faut écrire sur les lignes. Le jury se sent obligé de préciser qu'un correcteur voyant une copie présentée comme un cahier d'élève de CE1 ne part pas dans les dispositions les plus favorables pour la suite.
- Il faut utiliser une encore de couleur foncée.
- Il faut un stylo qui ne bave pas.
- Il faut écrire lisiblement. Certains candidats oublient le fait que leur copie va être lue, et qu'un correcteur n'attribue aucun point à ce qu'il ne comprend pas.
- Il faut éviter les ratures. Évidemment, il est possible de faire des erreurs, mais tout d'abord un brouillon peut servir à éviter cela et, le cas échéant, il est de loin préférable de barrer avec une règle que de gribouiller dans tous les sens, ce qui ne fera que transformer la copie en véritable torchon (et il vaut mieux barrer avec une règle qu'effacer une ligne entière).
- Il faut mettre les résultats en valeur, en soulignant ou en encadrant.
- Il faut utiliser des parenthèses, par exemple quand le problème utilise des objets (distincts) comme $(p')_0$ et $(p_0)'$.
- Certaines notations non usuelles doivent être introduites car ne sont pas connues et donc pas comprises par les correcteurs (par exemple, que signifie la notation $\mathbf{N}_{n-1}$ et que comprendre quand il est écrit $a! = b! = c$?). De plus, signalons que le terme «rigidité» ne figure pas au programme et ne constitue pas un argument à lui tout seul.
- Enfin, même si une certaine rigueur est évidemment attendue, il ne faut pas tomber dans l'excès inverse avec trop de formalisme, qui peut parfois gêner la compréhension (trop de symboles de Kronecker, etc.).

De plus, le jury a eu la désagréable surprise de constater que les règles de grammaire élémentaires apprises à l'école primaire étaient de moins en moins maîtrisées : un s au pluriel, accorder un verbe avec un sujet, mettre un e quand un adjectif est au féminin (ou ne pas en mettre quand il est au masculin : combien de « théorème spectrale »...) Tout cela devient un luxe que les correcteurs sont reconnaissants de trouver dans certaines copies (très peu nombreuses).

Rappelons que les copies mal présentées mais aussi truffées de fautes sont sanctionnées car cela rend la correction extrêmement difficile, et que l'orthographe et la grammaire ne sont pas facultatives, que ce soit en français ou en mathématiques. En effet, le jury a, comme l'année dernière, décidé d'inclure dans le barème un malus pour tout ce qui a trait à la présentation.

1.3.3 Conseils aux futurs candidats

Le jury a eu la désagréable surprise de voir que les candidats, dans une grande majorité, ne ressentaient pas le besoin de justifier quand ils appliquaient un théorème. Tout d'abord, tout résultat doit être justifié, et il faut vérifier que les hypothèses sont vérifiées avant d'appliquer un théorème. En résumé, pour les prochaines années, le jury attend surtout des efforts de la part des candidats pour que leurs copies soient lisibles et agréables à parcourir, pour améliorer la justesse des propos et la rigueur de leurs argumentations. Cela nécessitera inévitablement une bonne connaissance du cours, des techniques et compétences exigibles, dans le cadre des programmes.

1.4 Mathématiques 1 - filière PC

1.4.1 Présentation du sujet

Le problème propose de montrer dans $\mathbf{C}$, le résultat de Djokovic (D.Z. DJOKOVIC, *Product of two involutions*, Arch.Math. (18), pp.582-584, 1967) qui affirme qu'une matrice est semblable à son inverse si et seulement si elle se factorise en produit de deux involutions. Le problème s'articule en 5 parties. La première partie aborde la notion de polynôme réciproque et s'intéresse aux propriétés des racines d'un polynôme réciproque ou antiréciproque dans $\mathbf{C}[X]$. La deuxième partie permet de caractériser les matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ semblables à leur inverse. La troisième s'intéresse à des produits de symétrie et est utilisée dans les parties IV et V afin d'arriver au résultat final, en passant par l'étude des blocs de Jordan d'une matrice. La décomposition de Jordan d'une matrice est admise à cette fin au début de la partie V afin d'arriver au résultat.

Une analyse détaillée des questions est présentée dans l'annexe C.

1.4.2 Commentaires généraux

L'énoncé, très progressif, a permis aux candidats d'avancer assez significativement dans le sujet. Les meilleurs candidats ont bien compris l'articulation du problème et ont abordé la totalité des questions, sans toutefois traiter correctement l'ensemble. Malheureusement, certaines copies ont mis en évidence de grosses lacunes en algèbre linéaire. On a observé un bon étalonnement des notes et l'épreuve a parfaitement joué son rôle pour classer les candidats.

1.4.3 Conseils aux futurs candidats

Nous incitons les candidats à travailler la rigueur de l'argumentation et à ne pas se satisfaire de raisonnements confus. Nous rappelons également qu'il est important de citer précisément les numéros des questions utilisées lorsque le candidat utilise un résultat montré précédemment. Beaucoup de candidats oublient que leur copie sera lue. Il faut présenter avec un minimum de soin. Une copie illisible ou trop raturée est pénalisée. Il faut écrire lisiblement, séparer les arguments utilisés et surtout ne pas tenter de tromper le correcteur par des raisonnements peu clairs ou des calculs manifestement faux.

B Mathématiques 2 MP/MPI

Q1 - La première égalité a été prouvée correctement par une grande majorité de candidats. Cependant, pour la deuxième, la plupart des candidats n'ont pas vu qu'il fallait un argument supplémentaires pour justifier qu'une égalité vraie sur $\mathbf{R}_\star$ était en fait vraie sur $\mathbf{R}$ tout entier (et donc impliquait une égalité formelle de polynômes). Que ce soit parce que deux polynômes coïncidant sur une partie infinie sont en fait égaux, ou de la continuité, ou simplement en évaluant en 0 et en constatant que les deux polynômes avaient la même valeur, il y avait un argument supplémentaire à donner.

Q2 - Un sens a été fait correctement par la plupart des candidats mais, pour la réciproque (trop souvent confondue avec la contraposée, ce qui fait que beaucoup de candidats ont montré deux fois la même implication), trop de candidats pensent que « premiers entre eux » signifie « ne pas avoir de racine commune », surtout dans un cadre réel. Il fallait préciser que p était scindé.Précisons que pour un raisonnement par double implication, il est nécessaire de bien préciser les hypothèses au début de chaque implication, et également de bien différencier une hypothèse d'une affirmation (souvent sans preuve) et également de ce qu'on souhaite prouver. Beaucoup de candidats pensent également que deux polynômes ne sont pas premiers entre eux si et seulement si l'un des deux divise l'autre, ou appliquent le théorème de Bézout avec des compositions à la place de produits, mais également avec des coefficients réels ou même entiers relatifs ou des fractions rationnelles ! De plus, trop de candidats ont dit directement que les racines de p_0 étaient les $1/\alpha_j$, sans se préoccuper du fait que α_j pouvait être nul.

Q3 - Trop de candidats arrivaient à la conclusion que $\lambda = 1$. Même s'il n'est pas impossible que l'énoncé demande un résultat plus faible, le jury conseille aux candidats de bien se relire s'ils arrivent à montrer un résultat plus fort que celui de l'énoncé. Les formules de Viète sont plutôt bien connues des candidats. Beaucoup de candidats oublient de préciser que les racines sont simples, ce qui était indispensable. De plus, trop de candidats ont affirmé qu'un nombre égal à son inverse valait forcément 1. Signalons malheureusement un trop grand nombre de candidats qui disent que deux polynômes ayant les mêmes racines sont égaux ou, parfois, égaux ou opposés, pour coller au sujet : rappelons que « les tentatives d'arnaque » ne sont jamais payantes, et laissent un a priori négatif au correcteur pour la suite de la copie.

Q4 - Cette question a donné beaucoup de soucis aux correcteurs, même si elle a été plutôt bien traitée dans l'ensemble : le jury a dû se montrer extrêmement vigilant pour ne pas se laisser abuser par de trop nombreux candidats qui, après une vingtaine de lignes ne menant nulle part, arrivaient par une pirouette au bon résultat. L'écriture de $(p')_0$ pose parfois problème. La dépendance du polynôme réciproque en fonction du degré du polynôme de départ n'a pas toujours été bien comprise, ce qui compromet la question, et beaucoup de candidats ont confondu $(p')_0$ et $(p_0)'$. Beaucoup de candidats ont affirmé (à tort) que $p \mapsto p_0$ est linéaire et involutive. De plus, beaucoup de copies ne détaillent en rien certains calculs : le jury rappelle que le but des candidats est d'être compris, si les calculs ne sont pas du tout détaillés, le jury peut ne pas attribuer les points.

Q5 - Cette question a beaucoup interpellé le jury : la majorité des copies invoque le théorème de Rolle pour montrer que p' est scindé sur $\mathbf{R}$, mais **aucune hypothèse n'est évoquée**. Le jury peut concevoir que des candidats ne les connaissent pas, que des candidats se trompent, mais le très grand nombre de copies sans hypothèses (copies qui ne sont pas forcément mauvaises d'ailleurs) laisse penser le résultat beaucoup plus difficilement concevable suivant : **la plupart des candidats semblent ne même pas se douter que, pour appliquer un théorème, il faut vérifier les hypothèses. Le jury rappelle cette évidence avec force**.

Q6 - Le fait que α_i soit racine de chaque polynôme f_j n'a pas posé de difficulté particulière aux candidats (même si plusieurs candidats ont confondu l'indice k de la question, fixé, avec celui qui sert à décrire le produit dans f_j). Cependant, le caractère lié de la famille $(f_1, ..., f_n)$ a posé problèmes, trop de candidats déclarant tout simplement que des polynômes admettant une racine commune étaient forcément liés, ou qui disent que $f_1(a_j), ..., f_n(a_j)$ est liée donc $f_1, ..., f_n$. Encore une fois, le jury rappelle une évidence : il vaut mieux ne rien écrire que d'inventer des propriétés qui n'existent pas.

Q7 - La linéarité de P_j n'a pas posé de difficulté particulière (même si trop de candidats se sentent obligés de prouver que $P_j(0) = 0$), mais très peu de copies ont su montrer que P_j était effectivement à valeurs dans E. Quant au noyau, le jury attendait une écriture du type $Vect$, ou une écriture dépendant d'un paramètre, mais pas une écriture du type

$$f = \frac{(1 - \alpha_j^2) f(\alpha_j)}{X - \alpha_j},$$

qui n'a évidemment aucun sens mathématique (en tant que définition). De plus, trop de candidats sont partis de cette égalité pour donner le noyau, ne se rendant pas compte qu'ils ne montraient qu'une inclusion et pas une égalité.

Q8 - Cette question n'a pas posé de difficulté particulière.

Q9 - Cette question était difficile et a été traitée par un très petit nombre de candidats.

Q10 - Dans cette question, il fallait justifier l'écriture de $(S^\top)^i$ et ne pas se contenter de faire un produit avec les doigts et de donner le résultat (récurrence ou application linéaire associée). De plus, après avoir donné l'expression des vecteurs de l'énoncé, il fallait un tant soit peu justifier que c'était effectivement une base (au moins dire : on reconnaît la base canonique). Donner l'expression des vecteurs et dire que c'était évidemment une base ne rapportait aucun point.

Q11 - Cette question était calculatoire et difficile mais a tout de même été résolue par un nombre important de candidats. Cependant, il ne fallait pas oublier que l'ordre d'un produit change avec la transposée, et que l'ordre ne changeait pas parce que les matrices commutaient entre elles. Là aussi, rappelons aux candidats que le jury est attentif et repère vite les « tentatives d'arnaques ».

Q12 - Cette question a aussi été souvent bien traitée (même si beaucoup de candidats pensaient que le produit $U^\top U$ était impossible et ont conclu à une erreur d'énoncé) mais, comme toutes les questions où le résultat est donné, le jury doit être convaincu que le candidat ne trouve pas miraculeusement le bon résultat.

Q13 - Trop de candidats arrivent à

$$J(p) = \sum_{j=1}^{n} (1 - \alpha_j^2) V j V j^\top,$$

et en déduisent directement le résultat. Il fallait également préciser que $f_j(S^\top) = f_j(S)^\top$.

Q14 - Les candidats ont presque tous oublié de séparer les cas, selon que la racine stable était égale à son inverse ou non : précisons que, pour appliquer la question 6, il fallait deux racines (alors qu'une racine égale à 1 ou -1 peut être simple, et alors on ne pouvait pas appliquer la question 6). De plus, l'ensemble des matrices non inversibles n'étant pas un groupe, il fallait justifier le fait qu'un produit de matrices avec une matrice non inversible était non inversible (soit par un calcul de déterminant, soit par un argument de rang, de noyau etc.).

Q15 - Trop de candidats ont « prouvé » que $X \mapsto PX$ est un isomorphisme de F dans lui-même et donc que si un espace vectoriel vérifie C_A, alors il vérifie C_B , ce qui était faux et ne rapportait évidemment aucun point. Il fallait montrer que s'il existait un espace vectoriel vérifiant C_A, alors il existait un autre espace vectoriel vérifiant C_B isomorphe (et donc de même dimension) à ce premier espace vectoriel. Précisons d'ailleurs que dire simplement « PF est de même dimension que F car P est inversible » était insuffisant : il fallait passer par une application linéaire associée, ou préciser que $X \mapsto PX$ était un automorphisme car P est inversible, donc préserve la dimension (et précisons également qu'en dimension finie, l'image d'un espace vectoriel ne peut pas avoir une dimension plus grande que celle de l'espace de départ). De plus, beaucoup de candidats ont pensé que P était orthogonale et donc que $P^{\mathsf{T}} = P - 1$.

Q16 - Dans cette question et la suivante, trop peu d'élèves ont vu la nécessité d'avoir des vecteurs propres orthogonaux (et même une base orthonormale). Précisons que « théorème » est un mot masculin, et donc qu'on dit « théorème spectral » et non pas « théorème spectrale ». De plus, trop de candidats pensent qu'une combinaison linéaire ou une somme de vecteurs propres donne encore un vecteur propre.

Q17 - La première partie de la question a été assez souvent réussie grâce à la formule de Graßmann. Cependant, trop de candidats confondent supplémentaire et complémentaire (et union et somme). Dans combien de copies peut-on lire : «x n'est pas dans F_M donc est dans son orthogonal »,alors qu'un simple dessin en dimension 2 permet de se convaincre que c'est (très) faux ?

Q18 - De plus, comme il a déjà été dit : pour appliquer un résultat, il faut vérifier les hypothèses. Ainsi, il ne fallait pas oublier de préciser que la matrice $J(p)$ était symétrique. Beaucoup de candidats ont pensé que V était orthogonale et que les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres de $J(p)$.

Q19 - Dans cette question, trop peu de candidats ont pensé à dire que la matrice D donnée à la question 13 était inversible lorsqu'aucune racine n'était stable, et donc que c'était V qui n'était pas inversible. Il fallait donc utiliser le fait que les vecteurs colonnes étaient liés et ne pas oublier de préciser que les scalaires étaient non tous nuls.

Q20 - Question assez simple qui ne demandait que de faire un bilan de ce qui précédait. Précisons que, dans ce cas, les numéros des questions utilisées doivent être cités explicitement, on ne peut pas se contenter de dire : « d'après ce qui précède ».

Les questions suivantes ont été trop peu traitées.

RETOUR