

RAPPORT SUR L'ÉPREUVE MATHS D

- △ Épreuve spécifique à l'ÉNS Paris (options physique et informatique)
- △ Durée : 6 heures
- △ Coefficient pour l'admissibilité (en % du total d'admissibilité) : 37.5% (options physique et informatique).
- △ Coefficient pour l'admission (en % du total d'admission) : 6% (options physique et informatique)

Membres du jury : Lino Benedetto (correcteur), Jacques Darné (correcteur), Igor Kortchemski (coordinateur), Apolline Louvet (correctrice), Julien Marché (concepteur et correcteur), Yann Palu (correcteur), Matthieu Piquerez (correcteur), Paul Thévenin (correcteur)

1 Structure du sujet et remarques générales

Comme indiqué en ouverture du sujet, le but principal de l'épreuve était de démontrer une formule découverte par Michel Brion en 1988 qui exprime une somme de monômes indexée par les points entiers d'un polytope à l'aide d'une fraction rationnelle. Cette formule généralise en dimension supérieure la célèbre formule pour la somme d'une suite géométrique : tant pour son importance pratique que pour sa beauté formelle, elle est devenue un classique des mathématiques contemporaines. La preuve originale de M. Brion utilisant des arguments sophistiqués de géométrie algébrique, nous avons opté pour une preuve élémentaire exposée dans l'excellent livre *Computing the Continuous Discretely* de Beck & Robins. Cette nouvelle preuve est basée sur un argument géométrique utilisant de façon cruciale la formule d'Euler, qui s'écrit $\sum_F (-1)^{\dim F} = 1$ où F parcourt toutes les faces d'un polytope donné. Le sujet terminait par une application au théorème d'Ehrhart : le nombre de points entiers dans kP où P est un polytope rationnel est une fonction quasi-polynomiale de $k \in \mathbb{N}$.

Passons en revue la structure du sujet et l'objectif de chaque partie.

- La partie préliminaire définit les fonctions quasi-polynomiales et en donne des propriétés élémentaires ainsi que des exemples.
- La première partie étudie le nombre de décompositions d'un entier n comme somme de multiples de k entiers fixés. Il s'agissait de montrer que c'est une fonction quasi-polynomiale de n et d'établir une formule explicite dans le cas $k = 2$. Cette partie mobilisait différentes compétences : manipulations de séries, décompositions en éléments simples et arithmétique élémentaire.
- La deuxième partie, découpée en trois sous-parties, s'intéresse aux polytopes. Dans la première sous-partie, on établit le fait fondamental qu'un polytope peut être à la fois défini par un jeu d'inéquations linéaires et comme étant l'enveloppe convexe d'un ensemble fini de points. La deuxième sous-partie établit la formule d'Euler : il en existe de nombreuses preuves, il s'agit ici de la 17ème parmi les 21 preuves proposées par le site [The Geometry Junkyard](#). Elle utilise un point de vue fonctionnel (théorie des valuations) dû à Klain & Rota. Enfin la troisième sous-partie s'intéresse aux complexes, c'est-à-dire aux assemblages de polytopes, et prouve que tout polytope peut être triangulé, i.e. découpé en simplexes. Cette partie mobilisait la convexité, une bonne intuition géométrique ainsi qu'une certaine aisance pour manipuler la notion, nouvelle, de polytope.

- La troisième partie étudie le polytope de Birkhoff, qui n'est autre que l'ensemble des matrices bistochastiques. On montre que ses sommets sont les matrices de permutation (théorème de Birkhoff-Von Neumann). Cette partie, assez élémentaire, servait à illustrer les résultats de la section précédente.
- La quatrième partie précise quel sens donner au développement en série d'une fraction rationnelle. Elle contient beaucoup de définitions mais peu de questions dont le but était essentiellement de se familiariser avec les définitions.
- La dernière partie établit le théorème de Brion et ses corollaires. La première sous-partie consiste à prouver que les séries d'Euler-MacLaurin associées aux cônes sont rationnelles. Cela fait écho aux formules établies dans la première partie et utilise de façon cruciale la triangulabilité des polytopes établie dans la deuxième partie. La deuxième sous-partie démontre le théorème de Brion : l'argument géométrique de la « visibilité » des faces y est détaillé et la formule d'Euler y joue un rôle crucial. Enfin la dernière sous-partie établit le théorème d'Ehrhart en corollaire : le polytope de Birkhoff y réapparaît pour le dénombrement des carrés magiques. Sans aucun doute, cette partie est la plus difficile du sujet, elle s'appuie sur toutes les sections précédentes auxquelles s'ajoutent de nouvelles difficultés techniques.

Toutes les candidates et candidats ont été méritants de se confronter à une épreuve longue et difficile. Il n'était pas nécessaire de traiter un grand nombre de questions pour obtenir une excellente note (les quatrième et cinquième parties ont été peu voire pas abordées). Les questions utilisant de manière relativement directe les outils du programme étaient pour la plupart rassemblées dans la partie préliminaire et la première partie, et ont été dans l'ensemble bien traitées dans un grand nombre de copies. Les parties suivantes demandaient de la réflexion et de l'intuition géométrique afin d'appréhender la notion de polytope. Les copies ayant obtenu les meilleures notes sont généralement celles ayant traité une grande part des questions classiques (partie préliminaire et première partie), ainsi qu'une partie non négligeable de la troisième partie (voir ci-dessous pour davantage de détails).

2 Analyse statistique des notes

Notes brutes. Chaque question du sujet rapportait un nombre de points décrit dans la Section 5, et sa réussite a été notée entre 0 et 4 (ainsi, une réussite de $1/4$ sur une question donne 25% des points de cette question). La note brute correspond alors à la somme du nombre total de points obtenu. La note brute maximale possible était ainsi de 66.5 et la meilleure copie a obtenu une note brute de 31.9 points. Les notes sont ramenées ultérieurement sur 20 par une transformation donnée plus bas. On obtient ainsi la distribution des notes brutes donnée par la Figure 1.

Cette année, un système de bonus/malus de 1 point sur la note brute a été utilisé pour récompenser les rédactions propres, honnêtes et rigoureuses et pour pénaliser les rédactions trop brouillonnes, mal-honnêtes, ou imprécises. En particulier, les copies à l'écriture trop illisible ou affirmant avoir démontré des résultats qui n'étaient en fait pas prouvés dans la rédaction ont été sanctionnées par ce moyen.

Transformation des notes brutes en notes finales. L'objectif de l'épreuve est essentiellement de contribuer à la sélection d'environ 160 admissibles (son poids final à l'admission est largement réduit du fait des coefficients des épreuves orales). Par ailleurs, afin d'obtenir une répartition de notes satisfaisant à des objectifs d'écart-type, en particulier vis à vis des autres épreuves, une transformation linéaire par morceaux des notes brutes permet de ramener les notes sur 20. Cette transformation a été choisie de sorte

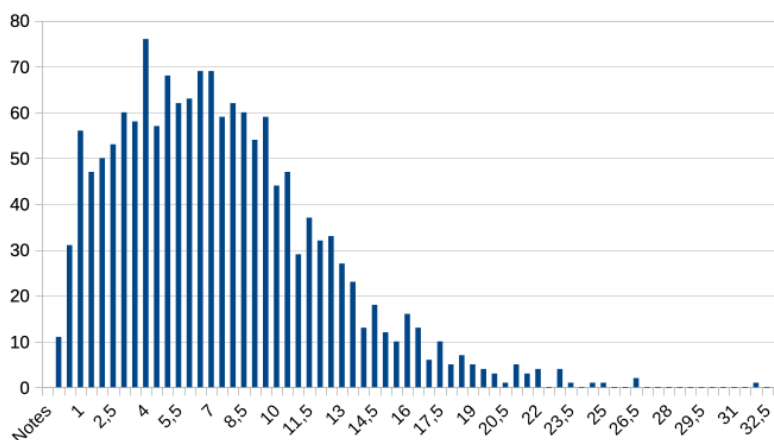


FIGURE 1 – Histogramme des notes brutes.

que sur l'intervalle $\llbracket 0, 21 \rrbracket$ de notes brutes, sa dérivée (sauf aux points de recollement) soit légèrement croissante afin de valoriser les copies ayant bien progressé dans le sujet. Nous renvoyons à la Table 1 pour quelques correspondances entre notes brutes et notes finales, qui pourrait aider les enseignant-e-s en classes préparatoires à noter ce sujet comme le jour du concours.

note brute	note finale
5	4
9.8	8
14.5	12
18.9	16
21	18

TABLE 1 – Correspondance entre quelques notes brutes et notes finales.

Analyse des notes finales. La distribution des notes finales est donnée par la Figure 2, avec une moyenne de 5.91/20, une médiane de 5.3/20 et un écart-type de 3.89. Une comparaison des éléments statistiques des notes de l'épreuve des années 2025, 2024, 2023, 2022, 2021 est donnée dans la table 2. La moyenne des 157 candidat-e-s admissibles est de 13.3 et la moins bonne note obtenue par un-e candidat-e admissible est de 6.7/20.

En faisant parfaitement la partie préliminaire et la première partie, on obtenait 12.5/20. En faisant parfaitement la partie préliminaire, première partie et partie 2.1 on obtenait 18.7/20. En faisant parfaitement la partie préliminaire, les questions (5) à (8) et (12) à (14) on obtenait 11.6/20.

Les questions typiques traitées par une moyenne-bonne copie (sans être excellente) sont les suivantes : questions (1) à (3), éléments de réponse sur (4), (5), (6), éléments de réponse sur (9), (12), éléments de réponse sur les questions (13) à (16), (19), éléments de réponse sur (20), (21) et (25), et au moins en partie les questions (33), (34) et (36), ce qui donnait une note finale d'environ 12.5/20.

Les copies qui se distinguaient de ces copies moyennes-bonnes avaient généralement traité la question (4) correctement, au moins en partie les questions (7) et (10), la question (22), au moins une partie

de la section 3, ou correctement les questions (33), (34) et (36), ce qui donnait une note finale d'environ 16/20.

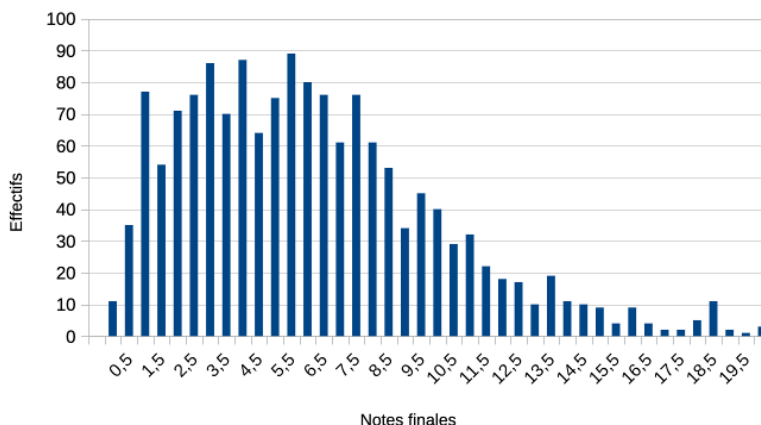


FIGURE 2 – Histogramme des notes finales.

TABLE 2 – Éléments statistiques de comparaison entre les notes des épreuves écrites de 2025, 2024, 2023 et 2022.

	2025	2024	2023	2022
Nombre d'inscrit-e-s	2362	2170	1984	1879
Nombre de présent-e-s	1540	1465	1352	1260
Copies ≥ 4	993(64.4%)	1043(71.2%)	863(64.6%)	680(54.4%)
Copies ≥ 8	393(25.5%)	350(23.9%)	513(38.4%)	277(22.1%)
Copies ≥ 12	119(7.7%)	96(6.6%)	206(15.4%)	119(9.51%)
Copies ≥ 16	31(2.0%)	35(2.4%)	68(5.09%)	28(2.24%)
Moyenne	5.91	5.94	6.71	5.4
Médiane	5.3	5.0	5.3	4.3
Écart-type	3.89	3.53	4.76	4.07
Moyenne des 160 meilleures notes	13.9	13.3	15.2	13.6
Écart-type des 160 meilleures notes	2.37	2.81	1.98	2.18

3 Conseils aux candidates et candidats

Nous profitons du rapport pour donner quelques conseils pour réussir au mieux l'épreuve de Maths D :

- Faire attention au soin de l'écriture (certaines réponses étaient illisibles, cela a en particulier pénalisé plusieurs bonnes copies).
- Utiliser un brouillon.
- Prendre le temps de bien rédiger les réponses aux premières questions du sujet (s'assurer de ne pas être passé à côté d'un point de détail, rédiger de façon claire et précise, mais concise).
- Prendre le temps de comprendre la structure du sujet, ou du moins de la partie du sujet abordée, ainsi que les définitions et notations introduites dans le sujet. Parfois non-intuitives, elles sont nécessaires pour bien comprendre/répondre aux questions.
- Être honnête : ne pas prétendre avoir démontré un point qui ne l'est pas ; mais ne pas hésiter à présenter une stratégie non aboutie (en le signalant explicitement), particulièrement dans les parties plus avancées du sujet.
- Le grapillage ne paie pas : traiter uniquement les parties « faciles » de nombreuses questions ne rapporte pas de points, voire est contre-productif.

4 Erreurs les plus fréquentes

Nous signalons ici quelques erreurs ou confusions fréquemment commises :

- Q.(1) Un espace vectoriel doit être non vide.
- Q.(2) Un nombre conséquent de copies identifie les coefficients terme à terme sans faire attention au fait que P et Q ne sont pas des polynômes.
- Q.(4) Une erreur récurrente a consisté à croire que cette question faisait intervenir une combinaison linéaire de produits de fonctions quasi-polynomiales ; un calcul explicite faisait apparaître un produit de Cauchy.
- Q.(5) Le cardinal de $\llbracket 0, n \rrbracket$ n'est pas n .

5 Commentaires détaillés par questions

Pour chaque question, outre des remarques sur le fond, nous indiquons son nombre total de points, le nombre de copies ayant obtenu au moins 75% des points, le nombre de copies l'ayant abordée (sur un total de 1540 copies) ainsi que les réussites moyennes globales et des 160 meilleures copies (pourcentage du nombre total de points obtenus par les 1540 copies par rapport au nombre total de points possible puis pourcentage du nombre total de points obtenus par les 160 meilleures copies par rapport au nombre total de points possible).

Partie préliminaire. Les candidat-e-s ont obtenu en moyenne 39.4% de leurs points sur cette partie avec une réussite moyenne de 57.1%. Les 160 meilleures copies ont une réussite moyenne de 85.7% sur cette partie.

- (1) [1 point, 1224 copies \geq 75% sur 1517 copies, réussites moyennes de 77.4% et de 85.9%.]
 Il fallait montrer que l'ensemble des fonctions quasi-polynomiales formait un espace vectoriel. La méthode la plus simple et la plus utilisée était de montrer qu'il s'agissait d'un sous-espace de l'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ des fonctions de \mathbb{Z} dans \mathbb{C} . Cette question a été généralement bien traitée, malgré quelques arguments parfois oubliés (l'ensemble est non vide, et est inclus dans $\mathcal{F}(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$).

- (2) [1.5 points, 785 copies $\geq 75\%$ sur 1430 copies, réussites moyennes de 52% et de 90.2%.]
 Cette question a été également bien traitée. Il fallait montrer que tous les coefficients (périodiques) de $P - Q$ étaient nuls. P et Q n'étant pas des polynômes, cela ne découle pas immédiatement du résultat analogue sur l'ensemble des polynômes.
- (3) [1 point, 1061 copies $\geq 75\%$ sur 1394 copies, réussites moyennes de 72.5% et de 96.6%.]
 Question bien traitée dans l'ensemble également. Si $P : n \mapsto \sum c_j(n)n^j$ est quasi-périodique de période commune m , alors les $P_i : n \mapsto \sum c_j(n)n^j 1_{n \equiv i \pmod m}$ sont bien des polynômes de somme P . La réciproque s'obtient en vérifiant qu'une somme de polynômes de cette forme est bien quasi-périodique.
- (4) [1.5 points, 474 copies $\geq 75\%$ sur 1232 copies, réussites moyennes de 38.3% et de 73.9%.]
 Cette question, plus difficile, a été moins bien traitée. Une réponse claire et concise augurait en général d'une bonne copie. Il fallait obtenir le développement en série entière $\frac{1}{(1-\omega x)^p} = \sum_{n \geq 0} \binom{n+p-1}{p-1} \omega^n x^n$, et conclure par périodicité de la suite $(\omega^n)_{n \geq 0}$. Il est à souligner que, ici et dans la suite, de nombreuses copies ont utilisé sans le démontrer le fait (vrai, mais non trivial) qu'un produit de fonctions quasi-polynomiales était quasi-polynomial. Cela a été sanctionné. Par ailleurs, cette stratégie de démonstration faisait intervenir des produit de Cauchy et non des produits termes à termes. De nombreuses copies sont passées à côté de cette difficulté.

1. Décomposition d'un entier en parties. Les candidat·e·s ont obtenu en moyenne 25,7% de leurs points sur cette partie avec une réussite moyenne de 18.6%. Les 160 meilleures copies ont une réussite moyenne de 42.6% sur cette partie.

- (5) [1 point, 923 copies $\geq 75\%$ sur 1329 copies, réussites moyennes de 58% et de 90.4%.]
 La question a été bien traitée en général. Il fallait remarquer que $P(n) \leq (n+1)^k$, et conclure par comparaison. Beaucoup de copies n'ayant pas eu l'ensemble des points ont obtenu une borne supérieure différente - et généralement fautive. À noter le nombre important d'erreurs commises sur le nombre d'éléments de l'ensemble $\llbracket 0, n \rrbracket$.
- (6) [1 point, 852 copies $\geq 75\%$ sur 1137 copies, réussites moyennes de 54.4% et de 90.4%.]
 Par la question précédente, le rayon de convergence de F est au moins 1. Un produit de Cauchy permettait de conclure. Une justification de la sorte était exigée pour pouvoir appliquer le produit de Cauchy. Cette question a été généralement bien traitée.
- (7) [1 point, 221 copies $\geq 75\%$ sur 816 copies, réussites moyennes de 16.7% et de 55.7%.]
 Cette question utilisait la décomposition en éléments simples ainsi que le résultat de la question (4) et la stabilité par somme de l'espace vectoriel des fonctions quasi-polynomiales. Plusieurs copies ont, comme pour la question (4), utilisé directement la stabilité par produit sans la démontrer.
- (8) [1.5 points, 68 copies $\geq 75\%$ sur 417 copies, réussites moyennes de 5% et de 31.6%.]
 Il fallait ici remarquer que 1 est la racine de multiplicité maximale dans le produit (quand $k \geq 2$), et qu'elle est d'ordre k . On déterminait le coefficient dominant en calculant $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)^k}{\prod (1-x^{a_i})} = \frac{1}{\prod a_i}$. Un point bonus a été accordé pour la remarque que le cas $k = 1$ doit être traité à part. La question a été généralement évitée par les candidats.
- (9) [1.5 points, 174 copies $\geq 75\%$ sur 935 copies, réussites moyennes de 19.9% et de 44.7%.]
 La question comportait une partie plus simple (exhiber une fonction ϕ candidate) et une partie plus délicate (prouver que ϕ vérifie bien les hypothèses de l'énoncé). Cela pouvait se faire soit directement à la main - ce que beaucoup de candidats ayant correctement répondu ont fait - soit

en utilisant les résultats des questions (4) et (7). La partie plus simple a été généralement bien traitée, la partie plus délicate beaucoup moins.

(10) [2 points, 76 copies $\geq 75\%$ sur 650 copies, réussites moyennes de 9% et de 32.3%.]

Il fallait tout d'abord décomposer l'expression en éléments simples, puis calculer les coefficients un par un en déterminant les limites des expressions correspondantes. La question a été généralement évitée ou mal traitée, parfois au prix de nombreuses pages de calculs qui n'aboutissent pas. Mentionnons que la formule attendue étant indiquée dans l'énoncé, certaines copies ont sauté des étapes dans le calcul pour conclure avoir obtenu le résultat obtenu, à partir de calculs intermédiaires ne suffisant pas pour conclure voire faux. Ceci a été fortement pénalisé dans la notation. En revanche, la notation a valorisé les copies contenant une preuve partielle correcte et indiquant que ces résultats partiels ne suffisaient pas pour conclure.

(11) [2 points, 10 copies $\geq 75\%$ sur 336 copies, réussites moyennes de 1% et de 5.2%.]

La question finale de la partie a été très peu traitée. Le sujet donnait une indication de stratégie (considérer le cas $b = 1$) qui a souvent été mal exploitée.

2. Étude de polytopes.

2.1. Enveloppe convexe des sommets. Les candidat-e-s ont obtenu en moyenne 18, 3% de leurs points sur cette partie avec une réussite moyenne de 15.6%. Les 160 meilleures copies ont une réussite moyenne de 41.0% sur cette partie.

Dans cette partie, plusieurs questions comprenaient une partie plus facile (souvent traitée) et une partie significativement plus difficile (beaucoup moins traitée). Les copies s'étant confrontées aux parties plus difficiles ont été valorisées par rapport aux copies n'ayant traité que les parties faciles.

(12) [1.5 points, 377 copies $\geq 75\%$ sur 1269 copies, réussites moyennes de 33.8% et de 71.9%.]

La question a presque toujours été abordée. La première partie demandait de vérifier qu'une face F d'un polytope vérifiait elle-même les propriétés d'un polytope. En particulier, il fallait utiliser le fait que $\ell(x) = a$ si et seulement si $\ell(x) \leq a$ et $-\ell(x) \leq -a$. Si elle a souvent été réussie, une ou plusieurs propriétés (caractère non vide, borné, définition par des formes linéaires) ont parfois été oubliées. La deuxième partie demandait de vérifier que $\dim(F) < \dim(P)$ si F est une face stricte de P . Le plus simple était de montrer qu'il existe ℓ telle que $\ell(x) = a$ pour tout $x \in F$ et $\ell(y) < a$ pour au moins un $y \in P$. Cette partie a été généralement moins réussie. Par ailleurs, certaines parties de la question nécessitaient d'avoir bien assimilé les différentes définitions introduites au début de la partie 2. En particulier, la "dimension de P " $\dim(P)$ était définie comme la dimension de l'espace vectoriel \vec{P} engendré par les $x - y$, $x, y \in P$ (P n'étant pas un espace vectoriel), ce qui a mené à des confusions dans certaines copies.

(13) [1 point, 138 copies $\geq 75\%$ sur 1147 copies, réussites moyennes de 24.5% et de 55.9%.]

Montrer qu'un polytope a un nombre fini de faces distinctes est une conséquence du fait qu'il est défini par un nombre fini de formes linéaires. Montrer qu'il a au moins un sommet est plus difficile, et a de fait été moins réussi. Des points ont été accordés aux copies raisonnant par récurrence sur la dimension des faces. Comme dans la question précédente, plusieurs copies n'ont pas utilisé les définitions exactes introduites au début de la partie 2. Ainsi, une des approches communément utilisées dans les copies pour construire un sommet menait en fait à un ensemble vide ou dont le caractère non-vide était non trivial. Or, par définition, un sommet est non vide. D'autres stratégies analogues menaient bien à la construction d'un singleton, mais dont le point n'appartenait pas au polytope.

- (14) [2 points, 47 copies $\geq 75\%$ sur 864 copies, réussites moyennes de 13.4% et de 38.1%]
De même, cette question comprend une partie plus facile (montrer que $P \subseteq \text{Conv}(V)$), très bien traitée. La réciproque est beaucoup plus difficile et requiert une intuition géométrique. Les copies qui ont eu une bonne idée, voire agrémentée d'un dessin explicatif, ont eu presque tous les points.
- (15) [1 point, 123 copies $\geq 75\%$ sur 585 copies, réussites moyennes de 12.4% et de 50.6%]
Cette question était légèrement ambiguë : l'intérieur du polytope est-il l'intérieur au sens de \mathbb{R}^d , ou l'intérieur comme défini dans le sujet ? Les copies qui justifiaient par un argument de translation et de diminution de dimension ont eu presque tous les points.
- (16) [1 point, 107 copies $\geq 75\%$ sur 656 copies, réussites moyennes de 15.9% et de 48.1%]
Ici, il fallait montrer que Q est un polytope. La seule caractéristique difficile à démontrer était que Q est borné, ce qui comptait pour la moitié des points. De nombreuses copies ont omis ou admis cette partie de la question.
- (17) [1 point, 4 copies $\geq 75\%$ sur 265 copies, réussites moyennes de 1.1% et de 4.8%]
Question difficile et très peu abordée.
- (18) [1 point, 14 copies $\geq 75\%$ sur 142 copies, réussites moyennes de 1.1% et de 4.8%]
Il s'agissait ici de raisonner par l'absurde : Soit $x \in \text{Conv}(V)$. Il s'écrit comme une combinaison linéaire $\sum c_i v_i$, où les v_i sont les éléments de V . Puisque x est un sommet et n'appartient pas à V , pour tout $v \in V$ on a $\sum_{i \in S_x} \ell_i(v) < \sum_{i \in S_x} \ell_i(x)$. Ainsi, pour tout $y \in \text{Conv}(V)$, $\sum_{i \in S_x} \ell_i(y) < \sum_{i \in S_x} \ell_i(x)$, et on obtient une contradiction. Cette question a été très peu abordée, et généralement réussie uniquement par des copies ayant réussi les questions précédentes.

2.2 Formule d'Euler. Les candidat·e·s ont obtenu en moyenne 6,0% de leurs points sur cette partie avec une réussite moyenne de 6.7%. Les 160 meilleures copies ont une réussite moyenne de 29.4% sur cette partie.

- (19) [0.5 points, 351 copies $\geq 75\%$ sur 557 copies, réussites moyennes de 23.9% et de 73%]
Cette question introductive à la sous-section était une question d'« échauffement », et a été relativement bien réussie (bien que parfois par des arguments inutilement complexes). Le plus simple était de remarquer que les polytopes de \mathbb{R} sont les segments non vides. Cela permettait de montrer que les éventuels points de discontinuité sont les bornes supérieures de ces segments.
- (20) [1 point, 144 copies $\geq 75\%$ sur 397 copies, réussites moyennes de 11.4% et de 48.1%]
La partie difficile de cette question était de prouver que, pour tout polytope P et tout $z \in \mathbb{R}$, $P \cap \{x_n = z\}$ est soit un polytope, soit vide. Une erreur commune ici a été de dire que, si ℓ est une forme linéaire sur \mathbb{R}^n , $(x_1, \dots, x_{n-1}) \mapsto \ell(x_1, \dots, x_{n-1}, z)$ est une forme linéaire sur \mathbb{R}^{n-1} . La rédaction était généralement un peu hésitante.
- (21) [2 points, 57 copies $\geq 75\%$ sur 312 copies, réussites moyennes de 7% et de 34.3%]
La question mêlait des arguments géométriques et algébriques. Une confusion assez générale a été faite sur la fonction g et la fonction f_z . La rédaction était particulièrement délicate. Il fallait être rigoureux ici, et appliquer le même genre d'argument géométrique qu'à la question précédente.
- (22) [0.5 points, 65 copies $\geq 75\%$ sur 164 copies, réussites moyennes de 4.7% et de 25.8%]
Par rapport au reste de la section, cette question était plutôt intuitive. Elle a été peu abordée, mais bien traitée par les copies qui s'y sont attaquées. Il fallait repasser par la définition de P° .
- (23) [1.5 points, 7 copies $\geq 75\%$ sur 116 copies, réussites moyennes de 1.4% et de 9.2%]
Cette question a été très peu abordée.

- (24) [1 point, 16 copies $\geq 75\%$ sur 108 copies, réussites moyennes de 1.7% et de 10.9%.]
Plusieurs copies ont voulu utiliser directement la question précédente. Pour l'appliquer, il fallait remarquer que l'ensemble des intérieurs relatifs des faces forme une partition du polytope, et appliquer χ_n à l'égalité $1_P = \sum_F 1_{F^o}$.

2.3 Triangulations. Les candidat·e·s ont obtenu en moyenne 0,9% de leurs points sur cette partie avec une réussite moyenne de 1.3%. Les 160 meilleures copies ont une réussite moyenne de 5.6% sur cette partie.

- (25) [1 point, 24 copies $\geq 75\%$ sur 203 copies, réussites moyennes de 3.8% et de 12.1%.]
Cette question se compose de deux parties. L'une, difficile, est de montrer l'existence d'une face de dimension $k - 1$. Elle a été généralement oubliée. Une fois l'existence prouvée, il faut remarquer que l'intersection de deux faces est soit vide, soit une face. Plusieurs copies ont affirmé, à tort, que l'intersection de deux faces se déduisait de l'intersection des formes linéaires associées; or c'est en réalité leur union qui entre en jeu. Il fallait faire attention à bien rédiger ce genre d'argument, assez intuitif.
- (26) [1.5 points, 4 copies $\geq 75\%$ sur 114 copies, réussites moyennes de 0.9% et de 5.1%.]
L'intuition géométrique (en dimension 2) est plutôt claire, et la présence d'un dessin explicatif a été récompensée.
- (27) [1.5 points, 6 copies $\geq 75\%$ sur 96 copies, réussites moyennes de 0.8% et de 4.8%.]
Question très peu abordée. Les copies ayant compris la question précédente ont généralement compris celle-ci, qui en est essentiellement une application directe.
- (28) [1 point, aucune copie $\geq 75\%$ sur 69 copies, réussites moyennes de 0.2% et de 1.0%.]
Question peu ou pas abordée.

3. Le polytope de Birkhoff. Les candidat·e·s ont obtenu en moyenne 5,4% de leurs points sur cette partie avec une réussite moyenne de 6.5%. Les 160 meilleures copies ont une réussite moyenne de 26.0% sur cette partie.

- (29) [2 points, 54 copies $\geq 75\%$ sur 435 copies, réussites moyennes de 9.6% et de 29.6%.]
Cette partie, consiste en l'étude d'un polytope naturel, celui de Birkhoff. La première question vise à montrer que c'est bien un polytope, et à calculer sa dimension. Plusieurs erreurs ont été commises pour prouver qu'il s'agit d'un polytope (attention à bien vérifier tous les points de la définition). Le calcul de la dimension, $(n - 1)^2$, était subtil. Des points ont été accordés dès lors que l'idée de compter les contraintes d'égalité apparaissait.
- (30) [1 point, 113 copies $\geq 75\%$ sur 267 copies, réussites moyennes de 8.6% et de 34.5%.]
Cette question ne posait pas de difficulté particulière, et a été raisonnablement réussie. Une possibilité était de raisonner par l'absurde, et de dire qu'une matrice de permutation ne peut pas être barycentre strict de matrices bistochastiques. Les égalités définissant une face du polytope doivent apparaître comme des inégalités définissant le polytope à la question précédente.
- (31) [1.5 points, 44 copies $\geq 75\%$ sur 162 copies, réussites moyennes de 4.2% et de 22.1%.]
Cette question était assez intuitive, et a été bien comprise. Il y avait cependant quelques subtilités (la suite ne revient pas forcément à son point de départ, par exemple) qui ont été généralement éludées. Sur ces questions « moins difficiles », ces détails font la différence.
- (32) [1.5 points, 44 copies $\geq 75\%$ sur 120 copies, réussites moyennes de 3.3% et de 19.5%.]
Cette question était une application de la précédente, ce qui a été généralement bien compris.

4. Développement des fractions rationnelles. Les candidat-e-s ont obtenu en moyenne 2,2% de leurs points sur cette partie avec une réussite moyenne de 3.5%. Les 160 meilleures copies ont une réussite moyenne de 11.6% sur cette partie.

- (33) [2 points, 39 copies $\geq 75\%$ sur 350 copies, réussites moyennes de 4.8% et de 17.0%.]
Cette question nécessitait de bien comprendre les définitions - pas évidentes - introduites dans cette partie. Les inclusions larges étaient claires, et la difficulté consistait à montrer que chacune était stricte. Il y a eu beaucoup de confusions entre la fonction x^n (l'indicatrice de $\{n\}$) et le monôme x^n , ainsi qu'entre produit terme à terme et produit de Cauchy, ce qui a donné lieu à plusieurs preuves erronées.
- (34) [0.5 points, 152 copies $\geq 75\%$ sur 308 copies, réussites moyennes de 11.4% et de 28.4%.]
Cette question était moins difficile que les précédentes et les suivantes. Une petite confusion a eu lieu sur la bonne définition de la fonction. Il fallait montrer que la fonction I était définie de façon unique. Les autres parties de la question ont été généralement bien traitées.
- (35) [2 points, 3 copies $\geq 75\%$ sur 89 copies, réussites moyennes de 0.3% et de 1.9%.]
Question très peu abordée.

5. Séries d'Euler-Maclaurin.

5.1 Rationalité des séries associées aux cônes. Les candidat-e-s ont obtenu en moyenne 0,6% de leurs points sur cette partie avec une réussite moyenne de 0.9%. Les 160 meilleures copies ont une réussite moyenne de 3.1% sur cette partie.

- (36) [0.5 points, 89 copies $\geq 75\%$ sur 241 copies, réussites moyennes de 8% et de 20.9%.]
Cette question plus simple était cachée loin dans le sujet, mais n'a pour autant pas échappé à de nombreuses copies. Il s'agissait de comprendre et d'appliquer la définition de la fonction E_A . Attention à bien justifier que la multiplication de fonctions au sens défini plus tôt coïncide dans certains cas avec la multiplication usuelle, bien que x^γ ne désigne pas le monôme de degré γ .
- (37) [2 points, 3 copies $\geq 75\%$ sur 79 copies, réussites moyennes de 0.3% et de 2.0%.]
Question très peu abordée.
- (38) [2.5 points, aucune copie $\geq 75\%$ sur 21 copies, réussites moyennes de 0% et de 0.3%.]
Question très peu abordée.

5.2 Le théorème de Brion. Les candidat-e-s ont obtenu en moyenne 0,1% de leurs points sur cette partie avec une réussite moyenne de 0.1%. Les 160 meilleures copies ont une réussite moyenne de 0.4% sur cette partie.

- (39) [1.5 points, aucune copie $\geq 75\%$ sur 29 copies, réussites moyennes de 0.1% et de 0.6%.]
Très peu abordée.
- (40) [1.5 points, aucune copie $\geq 75\%$ sur 23 copies, réussites moyennes de 0% et de 0%.]
Non abordée.
- (41) [2 points, 2 copies $\geq 75\%$ sur 27 copies, réussites moyennes de 0.1% et de 1.1%.]
Très peu abordée.
- (42) [1 point, aucune copie $\geq 75\%$ sur 23 copies, réussites moyennes de 0% et de 0%.]
Non abordée.

- (43) [1.5 points, aucune copie $\geq 75\%$ sur 21 copies, réussites moyennes de 0% et de 0%.]
Non abordée .
- (44) [0.5 points, aucune copie $\geq 75\%$ sur 23 copies, réussites moyennes de 0% et de 0.3%.]
Très peu abordée.

5.3 Application au théorème d'Ehrhart. Les candidat·e·s n'ont en moyenne pas obtenu de points sur cette partie avec une réussite moyenne de 0%. Les 160 meilleures copies ont une réussite moyenne de 0% sur cette partie.

- (45) [1 point, aucune copie $\geq 75\%$ sur 19 copies, réussites moyennes de 0% et de 0%.]
Non traitée.
- (46) [2.5 points, aucune copie $\geq 75\%$ sur 19 copies, réussites moyennes de 0% et de 0%.]
Non traitée.
- (47) [1.5 points, aucune copie $\geq 75\%$ sur 19 copies, réussites moyennes de 0% et de 0%.]
Non traitée.
- (48) [2 points, aucune copie $\geq 75\%$ sur 19 copies, réussites moyennes de 0% et de 0.2%.]
Non traitée.