Commentaires généraux

Tout d'abord, répétons comme tous les ans les mêmes remarques générales que trop de candidats ne semblent pas respecter :

— Les correcteurs ont signalé à de nombreuses reprises un nombre important de copies mal ordonnées, mal présentées, raturées, voire illisibles par endroits (la rédaction de la copie ne doit pas occasionner un jeu de piste pour l'examinateur) : **les étudiants doivent s'appliquer à présenter une copie claire et propre**.

Il est rappelé que les copies doivent être correctement numérotées, dans un ordre cohérent. Nous avons même rencontré cette année des candidats qui utilisent leur propre numérotation différente de celle de l'énoncé.

Les copies quasiment illisibles sont lourdement pénalisées.

Enfin, l'orthographe fantaisiste donne une très mauvaise impression à la lecture de la copie.

Nous insistons sur ces points qui défavorisent à coup sûr le candidat, même s'il n'y a pas dans le barème de points de présentation : le correcteur regarde la copie d'un œil moins bienveillant dans ce cas.

— Trop de candidats utilisent des abréviations utilisées par leurs professeurs mais qui n'ont pas toujours de sens pour le correcteur : il vaut mieux les éviter.

— De même, il est préférable de ne pas écorcher le nom et l'orthographe des théorèmes cités : on voit par exemple trop souvent « le théorème spectrale » etc.

— Il semble judicieux d'éviter d'utiliser des expressions telles que « il est trivial que », « par une récurrence immédiate », « il est clair que » , « forcément » ,etc , qui indisposent le correcteur : toute proposition énoncée dans une copie se doit d'être démontrée.

— De la même façon, les examinateurs ne goûtent guère des arguments inventés ou fallacieux pour arriver à toute force au résultat annoncé dans l'énoncé : la donnée d'un tel résultat permet en général de poursuivre la résolution de l'exercice sans avoir pu le démontrer : nous apprécions le candidat qui admet clairement le résultat en question pour continuer.

— Nous conseillons fortement aux candidats de prendre le temps de se relire car cela permet souvent d'éviter des erreurs basiques : par exemple, dans un développement limité, les deux termes de l'égalité ne tendent pas vers la même limite, etc.

— Enfin, un exemple même s'il permet souvent d'aider dans la perception du problème, ne permet pas de démontrer un résultat général.

Cette année, nous avons choisi de poser uniquement trois exercices, le deuxième parcourant une bonne partie du programme d'algèbre linéaire des deux années de classes préparatoires.
Le premier exercice portait sur les extrema avec contrainte d'une fonction à plusieurs variables obtenu par différentes méthodes et il n'y avait pas, cette année, d'exercices de probabilités.

— Rappelons qu'une lecture attentive de la totalité de chaque exercice du sujet permet souvent de comprendre l'architecture et la démarche proposée.

— Un trop grand nombre d'étudiants ne maîtrise pas les notions de base d'algèbre linéaire, même de première année, ainsi que les théorèmes principaux d'analyse du programme de deuxième année de MP et espèrent cependant venir à bout des questions posées en utilisant des recettes toutes faites bien souvent mal comprises.

— Nous constatons de nouveau une très grande maladresse dans les calculs (parfois très simples) qui sont trop rapidement abandonnés :

- ⋆ Les opérations sur les puissances posent encore beaucoup de problème à nombre de candidats.
- ⋆ On trouve encore trop d'équivalents à 0.
- ⋆ Les quantificateurs, les symboles $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$ sont trop souvent malmenés, voire oubliés lorsqu'ils sont fondamentaux.

Conclusion : Nous souhaitons obtenir dans la résolution des exercices proposés **de la rigueur**, **une rédaction claire et lisible** et **une justification des résultats en utilisant à bon escient le cours** : ainsi, nous encourageons les candidats à rédiger le plus proprement, correctement et rigoureusement possible leurs copies, en détaillant clairement les calculs effectués et les théorèmes utilisés à chaque étape de la résolution, sans forcément chercher à tout traiter de façon superficielle.
Nous essayons de construire nos exercices de façon très progressive, les dernières questions étant parfois plus difficiles et nous sommes donc surpris lorsque des candidats négligent totalement un exercice.
Nous rappelons enfin qu'il vaut mieux admettre clairement le résultat d'une question et avancer dans la résolution du reste de l'exercice plutôt que de donner des arguments faux qui indisposent nécessairement le correcteur.
Nous proposons cette année dans ce rapport une correction succincte du sujet afin d'inciter les candidats à l'étudier attentivement en reprenant « à la main » les parties parfois rapidement rédigées.

Commentaires par exercices

Exercice 1

Exercice sur la recherche d'extrema sous une contrainte d'une fonction à plusieurs variables en utilisant diverses méthodes.
Cet exercice a été trop peu traité par les candidats et nous le regrettons. Il n'y avait pourtant pas de grosses difficultés théoriques et plusieurs questions étaient quasiment des questions de cours : il est surprenant de constater que beaucoup de candidats ont des difficultés à prouver que F défini par son équation $x + y = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
Notons les principales erreurs rencontrées :

— Un point critique n'est pas forcément un extremum, même sur un ouvert.

— Très peu d'étudiants (1% environ) pensent à signaler que f est de classe C^1 avant de calculer ses dérivées partielles.

— On note une utilisation abusive de la trace et du déterminant de la Hessienne pour déterminer le signe des valeurs propres, alors que celles-ci sont calculées explicitement par le candidat.

— Montrer que F, donné par son équation $x + y = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en donner sa dimension représente un réel challenge pour certains candidats.

On a même rencontré :

- $\star$ $F(\lambda X + Y) = \lambda F(X) + F(Y)$ pour démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
- $\star$ $O \in F$ et donc, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

— Trouver l'orthogonal de F reste souvent d'une difficulté extrême.

— La notion de sous-espace affine semble inconnue de beaucoup d'étudiants.

Exercice 2

Cet exercice traite d'un endomorphisme de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ et faisait souvent appel au calcul sur les nombres complexes.
Nous sommes frappés par la méconnaissance des notions élémentaires de calcul dans $\mathbb{C}$ pour de nombreux candidats.
De façon plus précise :

— La somme des termes d'une suite géométrique n'est pas toujours connue.
Ainsi, la première question a été souvent maltraitée ce qui a entraîné par la suite de nombreux calculs inachevés voire non effectués.

— Bien que l'on ait rappelé que $\omega^n = 1$ et que $\overline{\omega} = \omega^{-1} = \dfrac{1}{\omega}$, beaucoup de candidats ont eu du mal à mettre en oeuvre ces relations.

— Il faut savoir poser le produit de deux matrices et ne pas écrire de grosses matrices avec des points pour effectuer le produit de deux matrices de taille n.

— Les racines du polynômes $X^4 - 1$ sont parfois assez étonnantes.

— Trop de candidats ont traité les questions **3.** à **7.** dans le cas $n = 3$.

— Beaucoup d'étudiants obtiennent des polynômes caractéristiques de degré différent de la taille de la matrice sans que cela ne leur pose problème.

Rappelons qu'il est important de lire complètement l'énoncé de chaque exercice : cela aurait permis à plus de candidats de traiter les questions faciles situées dans la deuxième partie de l'exercice.

Exercice 3

Exercice d'analyse classique mettant en oeuvre quelques théorèmes du programme d'analyse de deuxième année.
La dérivée de la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x h(t)\,dt$ amène toujours son lot de résultats surprenants !
Quelques remarques qui nous ont marquées :

— Le développement en série entière de la fonction exponentielle laisse souvent perplexe. Le domaine de validité est faux pour environ 10% des candidats...

— Certains candidats traitent les sommes de séries de la même façon que les sommes finies : la fonction $x \mapsto \dfrac{x^n}{(n!)^2}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et donc, la fonction $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{(n!)^2}$ est définie sur $\mathbb{R}$!

— f uniformément continue (sans intervalle) n'implique pas f lipschitzienne (toujours sans intervalle) !

— Toujours sur les fonctions lipschitziennes : pour montrer que f est lipschitzienne sur $[a,b]$, il ne suffit pas de montrer qu'il existe $k \geqslant 0$, tel que $|f(b) - f(a)| \leqslant k\,|b-a|$.

— Une fonction développable en série entière n'est pas une fonction polynomiale !

— $f(x) \leqslant \mathrm{e}^x$ n'implique pas que $f(x)-1 \underset{x\to 0}{\sim} x$, tout comme $f(x)-1 \underset{x\to 0}{\sim} x$ n'implique pas que $f(x) \geqslant 1+x$.

— Quasiment personne ne rappelle que si f est développable en série entière, elle possède un développement limité de tout ordre au voisinage de 0.

— Même si la fonction h est positive, on ne peut en déduire que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_1^x h(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

— $\lim\limits_{t\to a} f(t)$ ne peut dépendre de t, tout comme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ ne peut dépendre de n.

— On a aussi vu : $f(x) = \dfrac{1}{n\,!}\,\mathrm{e}^x$.

*****

Luc Valette.