3. Mathématiques 2

3.1. Introduction

L'objectif du sujet est d'étudier des fonctions sur $\mathbb{R}^+$ associées à plusieurs modèles probabilistes de ferromagnétisme. Ces modèles diffèrent par le choix initial d'une matrice symétrique J_n de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et d'un nombre $\beta > 0$ auxquels on associe la fonction

$$\begin{array}{rcl} H_n : \mathbb{R}^+ \times \{-1,+1\}^n & \to & \mathbb{R} \\ (h,x) & \mapsto & \frac{-\beta}{2} \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} J_n(i,j)x_i x_j - h\sum\limits_{i=1}^{n} x_i. \end{array}$$

Le sujet est divisé en deux parties. L'objet de la partie A est d'étudier les valeurs propres de certains exemples de matrices J_n et ce sont essentiellement des connaissances d'algèbre linéaire et de réduction de matrices qui sont mises à l'épreuve. Dans la partie B, le sujet étudie des variables aléatoires à valeurs dans $\{-1,1\}^n$ dont la loi de probabilité, qui peut être identifiée à une fonction sur $\{-1,1\}^n$, est proportionnelle à $x \mapsto \mathrm{e}^{-H_n(h,x)}$. De façon exacte, le sujet étudie un passage à la limite $n \to +\infty$ de deux quantités définies à l'aide de ces variables aléatoires (les limites sont dénommées magnétisation et pression). Dans une grande majorité de questions, cette seconde partie nécessite une maîtrise des connaissances d'analyse puis, vers la fin, des connaissances du programme de probabilités.

3.2. Analyse globale des résultats

La partie A qui ne concerne essentiellement que l'algèbre linéaire a été moyennement bien traitée. Certains points sont globalement bien maîtrisés. Réduire la matrice symétrique carrée qui ne contient que des éléments valant 1 (passage obligé dans la question **Q6**) est plus ou moins bien connu, même si on peut toujours voir le verre à moitié vide (voir dans la partie suivante les écueils remarqués). D'autres points font défaut (de façon statistique). Par exemple, près d'un tiers des candidats échouent sur la question **Q2**, qui nécessite de comprendre comment transformer une expression de la forme

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} J_n(i,j)x_i x_j,$$

alors que la question fait pourtant explicitement référence aux valeurs propres de la matrice symétrique J_n. De plus, beaucoup trop de candidats semblent penser que si une matrice carrée A vérifie $P(A) = 0$ pour un certain polynôme non constant P, alors toutes les racines de P sont des valeurs propres de A. Signalons un point positif : la partie A.V nécessite de bien maîtriser les produits de matrices par blocs et le jury est globalement satisfait des prestations sur ces aspects.

La partie B se concentre essentiellement sur des questions d'analyse-probabilités (hormis quelques questions matricielles). Cette partie a été beaucoup moins bien traitée car certaines questions nécessitent une vision globale du programme. Par exemple, on demande d'étudier la limite de $\frac{1}{n}\ln(\mathrm{tr}(A^n))$ quand $n \to +\infty$ pour une certaine matrice A de taille 2×2. Il faut donc à la fois connaître l'expression de cette trace en fonction des valeurs propres (issue des cours d'algèbre) et avoir une certaine expérience d'analyse sur le comportement asymptotique d'une somme de puissances.

3.3. Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux candidats

L'épreuve contient 44 questions, ce qui en fait une épreuve très longue. Statistiquement, hormis une centaine de copies, les réponses satisfaisantes ne concernent essentiellement qu'une trentaine de questions. Par exemple, la question Q38 n'a bien été traitée que dans dix copies et la dernière question dans seulement une copie.

Ce rapport se focalise sur les 30 premières questions.

Q1 Le théorème spectral énonce que toute matrice carrée symétrique réelle est diagonalisable. Le mot « réelle » a souvent été oublié.

Q2 Comme évoqué *supra*, cette question a souvent été mal traitée. Par exemple, dans certaines copies, l'argument faux suivant est utilisé : si un vecteur x de $\mathbb{R}^n$ a ses coefficients valant ± 1, alors il en est de même de $P(x)$ pour toute isométrie linéaire $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Le bon argument est plutôt de remarquer que l'on a l'égalité $\|P(x)\| = \|x\| = \sqrt{n}$. D'assez nombreux arguments sur le registre du « bluff » ont malheureusement été remarqués.

Q3 Question très facile.

Q4 L'information de l'énoncé $J_n \neq \pm I_n$ n'est pas utile. On a seulement besoin de prouver que les valeurs propres de J_n appartiennent à $\{-1, 1\}$. Ce point est normalement vu en cours. Dans un début d'épreuve, le jury attend un argument d'algèbre linéaire qui permet de prouver l'inclusion voulue.

Q5 Cette question a bien été traitée dans environ la moitié des copies. Voici quelques difficultés remarquées :

- parfois seule l'inclusion $\mathrm{Sp}(U_n) \subset \{0, n\}$ est montrée ;
- une fois le spectre de U_n connu, certains candidats ont du mal à obtenir rigoureusement le spectre de $J_n^{(C)} = \frac{1}{n}(U_n - I_n)$;
- certains candidats n'ont pas compris qu'il faut exploiter la relation affine entre $J_n^{(C)}$ et U_n et ont fait deux fois des calculs de polynôme caractéristique.

Q6 Cette question a été bien traitée dans environ la moitié des copies. La plupart des copies passent par un argument de partie réelle de nombres complexes ou une récurrence sur p. Le jury rappelle que les calculs sont lus intégralement. Malheureusement, lorsque les résultats sont donnés dans l'énoncé, certains candidats essaient d'arriver coûte que coûte à la conclusion avec des calculs hasardeux (ici, p est parfois miraculeusement confondu avec $p + 1$ en raison d'une mauvaise connaissance des sommes géométriques). De même, la raison d'une série géométrique doit être différente de 1 pour espérer appliquer la formule classique. Pour des raisons de lisibilité, on peut peut-être conseiller aux candidats de rappeler les formules trigonométriques qu'ils utilisent. En effet, certains calculs ont effectivement abouti mais le jury a eu l'impression que c'est essentiellement en recollant les morceaux et en laissant des arguments de côté.

Q7 Bien traitée dans environ un tiers des copies. Il faut montrer que la matrice $J_n^{(S)}$ est orthogonale grâce à la question précédente. Que ce soit en raisonnant avec la définition matricielle d'une matrice orthogonale ou en imposant l'orthogonalité des colonnes (ou lignes) distinctes et le caractère normé des colonnes (ou lignes), il faut distinguer deux calculs différents (orthogonalité + vecteur de norme 1). Certains candidats ont essayé de faire les deux calculs en même temps et ont fini par montrer que les vecteurs colonnes ont une norme nulle, ce qui est évidemment faux.

Q8 Bien réussie dans trois quarts des copies ayant traité la question. Autrement dit, dans un quart des copies, la matrice $J_n^{(1)}$ est mal calculée.

Q9 Question très délicate à corriger eu égard à la pratique de l'apprentissage du langage Python au sein du programme.

Q10 Bien réussie dans un tiers des copies ayant traité cette question. La formule de récurrence $C_{n,k+1} = C_{n,1}C_{n,k}$ étant facile à vérifier, le jury n'a pas exigé une rédaction rigoureuse habituelle pour les arguments par récurrence. Il n'en demeure pas moins qu'un argument par récurrence mérite au moins d'être annoncé (quitte à être effectué rapidement dans les cas faciles). En effet, le correcteur n'a pas à deviner l'argument que décident d'employer les candidats. Enfin, le jury a pénalisé des confusions comme celle-ci : si on note $P(k)$ l'hypothèse de récurrence, faire une récurrence ne signifie pas montrer

$$\exists k \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \qquad P(k) \Rightarrow P(k+1)\,,$$

mais plutôt

$$\forall k \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \qquad P(k) \Rightarrow P(k+1)\,.$$

Q11 Dans environ un tiers des copies, le polynôme annulateur $X^n - 1$ est trouvé et il est remarqué que cela implique que le spectre de $C_{n,1}$ est bien inclus dans l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité. Montrer l'égalité a été une toute autre affaire : cela n'a été fait correctement que dans une minorité de copies (essentiellement celles où il est remarqué que l'équation $C_{n,1}^n = I_n$ ne permet pas de déterminer avec exactitude le spectre mais donne seulement une inclusion). Autrement dit, dans un nombre conséquent de copies, le fait que $X^n - 1$ soit un polynôme annulateur semble suffisant pour en déduire directement la description exacte du spectre avec les racines n-ièmes de l'unité.

Q12 Bien traitée dans environ un cinquième des copies. Signalons que l'égalité de spectre d'une somme de matrices $\mathrm{Sp}(A+B) = \mathrm{Sp}(A)+\mathrm{Sp}(B)$ est un mythe (hormis si A ou B est une matrice scalaire). Un autre mythe est que les valeurs propres réelles d'une matrice réelle sont les parties réelles de ses valeurs propres complexes (tout est mélangé dans une telle assertion).

Q13 et Q14 En général, ces questions de vérification de linéarité et de calculs sur des matrices par blocs ont été bien traitées lorsqu'elles ont été abordées. Signalons que l'application $(A, B) \mapsto A \otimes B$ n'est pas symétrique (faux argument souvent rencontré pour simplifier la linéarité).

Q15 Bien traitée dans environ la moitié des copies où la question est abordée.

Q16 Dans l'ensemble, cette question a été bien traitée. Dans de rares cas, des candidats ont proposé une matrice $J_N^{(2)}$ non symétrique (ce qui est évidemment un indice d'une erreur de calcul).

Q17 Environ un dixième des copies traite de façon satisfaisante cette question de synthèse nécessitant l'appropriation par les candidats de la réduction pour une somme de matrices de la forme $A \otimes B$. Le point clé est que l'on peut trouver une matrice de passage commune (certains candidats ont d'ailleurs judicieusement remarqué que les matrices $I_n \otimes J_n^{(1)}$ et $J_n^{(1)} \otimes I_n$ commutent).

Q18 Comme c'est la première question d'une nouvelle partie (supposée indépendante), elle a été abordée dans la plupart des copies.

Signalons quelques détails :

- le jury n'apprécie que moyennement la formulation « dérivable par des théorèmes généraux ». De plus, il faut justifier que Z_n est une fonction strictement positive ;

- en mathématiques, on préfère évoquer la dérivabilité de Z_n plutôt que celle de $Z_n(h)$ (qui est l'évaluation numérique de Z_n en h) ;
- le fait qu'il faille utiliser le théorème de transfert semble une difficulté. Le jury a apprécié que seule une minorité de copies est passée à côté du théorème de transfert ;
- certaines copies ont confondu variables aléatoires X_i et leur valeurs notées x_i.

Q19 Question en réalité peu calculatoire. Il faut comprendre pourquoi on se retrouve avec une somme de termes $x_i x_{i+1}$ avec une convention spéciale pour $i = n$. Le résultat est donné dans l'énoncé et il y a eu manifestement des calculs incohérents aboutissant au résultat escompté.

Q20 Bien traitée dans la moitié des copies où la question est abordée.

Q21 Question de synthèse avec peu de calculs mais peut-être délicate à analyser. Bien traitée dans environ 500 copies.

Q22 Bien traitée dans environ un cinquième des copies où la question est abordée. Le jury a été un peu surpris de cet échec statistique car la question ne nécessite que de résoudre une équation du second degré et de justifier que le discriminant est positif (ce dernier point est important dans la réponse).

Les réponses devenant plus rares après cette question, on n'évoque plus les statistiques dans la suite.

Q23 Le jury a lu des étourderies avec des suites (qui dépendent de n) et dont la limite dépend aussi de n.

Q25 Globalement bien traitée malgré des copies faisant preuve de malhonnêteté dans la réponse proposée (eu égard à la présence du résultat dans l'énoncé).

Q26 On demande de justifier la convergence de l'intégrale de Gauss $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x$. Le jury est globalement déçu des prestations car il devrait s'agit d'une formalité.

Voici quelques remarques :

- oubli de la continuité de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2/2}$ qui justement assure qu'il n'y a aucun problème d'intégrabilité hormis $\pm\infty$;
- parfois, les candidats ont raisonné par parité pour l'étude de la convergence (c'est évidemment acceptable) pour se ramener à l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{d}x$ et utilisent des arguments compliqués (comparaison avec des intégrales) pour étudier ce qu'il en est en $x = 0$ (alors que la fonction est continue) ;
- pour la borne $+\infty$, parfois des majorations de $\mathrm{e}^{-x^2/2}$ ont été utilisées en oubliant de remarquer le caractère positif de $\mathrm{e}^{-x^2/2}$;
- lorsque $\mathrm{e}^{-x^2/2}$ a été comparé avec $\frac{1}{x^2}$, certaines copies invoquent à tort l'intégrabilité sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ (alors qu'on devrait se restreindre à un voisinage de $+\infty$).

Q27 Il faut savoir mettre sous forme canonique l'expression quadratique $ut - \frac{t^2}{2a}$ par rapport à t, puis effectuer un changement de variable affine. Plusieurs copies ont tenté des intégrations par parties sans succès.

Q28 Comme l'ensemble Λ_n est fini, il s'agit seulement de la linéarité de l'intégrale.

Q29 La difficulté de la question réside sans doute dans la manipulation des symboles $\sum$ et $\prod$ (même si toutes les quantités sont finies). Les futurs candidats pourraient réfléchir à développer une expression de la forme

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^3$$

et la comparer à la suivante (sans intervention du binôme de Newton) :

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_i a_j a_k$$

Q30 Question plutôt bien traitée. Conséquence très facile des calculs précédents et d'un modeste changement de variable affine.

À partir de la question **Q31**, le sujet devient assez difficile, avec des questions de synthèse ou techniques qui n'auraient sans doute pas posé de difficultés si elle avaient été placées plus en amont (par exemple la **Q32**). De rares candidats (moins de 5 %) arrivent à avancer sur cette suite et fin du sujet.

3.4. Conclusion

Le jury insiste régulièrement sur l'importance de la rédaction (lisibilité et clarté) et rappelle l'existence de malus pour les copies qui ne font aucun effort dans ce sens.

Des expressions telles que « théorème spectralE, reccurence, on a que » sont à proscrire.

La longueur d'un sujet ne saurait justifier d'écrire très rapidement des réponses de type brouillon (en particulier, les quantificateurs $\exists$ et $\forall$ ne doivent pas être utilisés dans des phrases en français, tout comme des abréviations comme « Thm »). Comme chaque année, on conseille de mettre en avant les hypothèses d'un théorème avant de l'appliquer directement. Cela permet souvent de mieux cerner les difficultés inhérentes à une question. De même, les questions dont les réponses sont données dans l'énoncé ont souvent des rédactions qui noient les arguments et calculs et dont le seul but est d'arriver à la conclusion quoi qu'il en coûte. Le jury a pénalisé ce type d'attitude.

L'épreuve étant très longue, il a été difficile aux candidats de s'approprier l'architecture globale du sujet. Néanmoins, des copies ont su mettre en avant leur expertise, leur clarté, la mise en évidence des points délicats dans les réponses et, finalement, ont pu obtenir de bonnes notes.