

# Mathématiques 1

## Présentation du sujet

Ce sujet, composé de trois parties, porte sur l'inégalité de Carleman.

La première partie propose tout d'abord une démonstration de l'inégalité intégrale de Klopp. On s'en sert ensuite pour prouver l'inégalité de Carleman. Cette partie nécessitait des connaissances sur les manipulations d'intégrales impropres.

La deuxième partie s'intéresse à la démonstration originale de l'inégalité de Carleman, utilisant de la topologie, du calcul différentiel et de l'optimisation sous contrainte.

La troisième partie s'intéresse quant à elle à l'inégalité de Carleman-Yang qui est un raffinement de celle de Carleman. Elle utilise principalement des connaissances sur les fonctions développables en séries entières.

## Analyse globale des résultats

Cette année, comme souvent, beaucoup de candidats traitent correctement un certain nombre de questions à leur portée, et montrent qu'ils ont tiré bénéfice de l'enseignement exigeant qu'ils ont suivi.

Chaque partie demandait à mettre en œuvre une partie bien précise du programme. Si la première demandait des techniques sur les intégrales à paramètres qui étaient plutôt connues (même si parfois fragiles), la deuxième, qui utilisait des notions de topologie et d'optimisation sous contrainte a été bien moins réussie. Le début de la troisième partie était assez classique et a été globalement plutôt bien réussi.

Il faut noter que certains candidats ne semblent pas avoir compris le rôle du brouillon, qu'ils confondent avec leur copie. Certaines copies remplies de ratures et particulièrement mal présentées ont été sanctionnées par un malus.

Nous avons observé de la fragilité chez beaucoup de candidats : les solutions apportées aux questions sont trop souvent incomplètes et/ou manquent de rigueur.

## Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

Avant de passer aux commentaires généraux, il faut signaler que le sujet comportait, dans sa première partie, une petite imprécision : Il est dit dans la première question que la fonction  $\varphi$  est continue sur l'intervalle  $J$ , ce qui peut être insuffisant. Cela a été vite repéré par le jury qui en a immédiatement tenu compte dans son barème (un bonus pour ceux qui s'en rendait compte). Mais au final, très peu de candidats (moins de cinq) l'ont indiqué sur leur copie (qui était par ailleurs excellente). Cette imprécision n'a donc eu aucun impact sur le déroulé du concours.

Les commentaires suivants indiquent les erreurs les plus fréquentes.

### Inégalité de Klopp

**Q1.** Il fallait rappeler le résultat sur les sommes de Riemann ce qui a été très souvent mal fait (formule fautive ou bien oublié du rappel des hypothèses). L'application de l'inégalité de convexité a trop souvent été utilisée sans rappeler que la somme des coefficients devait faire 1. Enfin, l'utilisation de la continuité de  $\varphi$  était à mentionner. Rappelons aux candidats que le concours porte sur l'ensemble des notions vues au cours de leurs deux années de CPGE et pas uniquement sur la seconde.

**Q2.** Beaucoup de candidats ont majoré la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0, x]$  sans s'apercevoir que ce majorant dépendait de  $x$ .

**Q3.** Le plus simple était ici d'utiliser le théorème de convergence dominée. Est-ce la présence de la fonction indicatrice qui a gêné certains candidats ? mais ce théorème classique de CPGE a été relativement mal appliqué.

À noter que beaucoup de candidats écrivent qu'une fonction intégrable sur  $\mathbb{R}^+$  est majorée sur  $\mathbb{R}^+$  ce qui est faux.

**Q4.** Trop de candidats n'ont pas tenu compte de l'indication. Une intégration par parties permettait ici de répondre aux deux questions simultanément (l'intégrabilité et l'égalité).

**Q5.** Beaucoup de candidats n'ont pas utilisé au bon moment l'indication de l'énoncé. De plus, l'intégrabilité de  $\ln$  en 0 est trop rarement indiquée.

**Q6.** Une question simple et globalement réussie mais où les candidats ont parfois manqué de rigueur (rappel des hypothèses par exemple).

**Q7.** Beaucoup de candidats oublient le cas particulier  $k = 1$ . Bizarrement, ce qui n'était qu'une simple étude d'une fonction de la variable réelle a été traité incorrectement par des candidats qui n'ont pas vu quand et comment utiliser l'hypothèse de décroissance de la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

**Q8.** Une question plutôt réussie par les candidats encore en lice dans cette partie. Le lien avec la question précédente a été bien vu.

**Q9.** Certains candidats ont eu du mal à être efficaces sur cette question et de bien voir comment faire le lien avec la question précédente.

**Q10.** Une question difficile (certains n'ont pas vu où la décroissance de la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  a été utilisée). Très peu de candidats ont vraiment tenté une réponse. Certains ont vu qu'il fallait réarranger les termes de la suite (mais sans voir comment).

### Inégalité de Carleman

**Q11.** Beaucoup de candidats confondent le gradient d'une fonction  $\mathcal{C}^1$  sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  avec la somme des dérivées partielles.

**Q12.** Une question de topologie. Ceux qui ont vu qu'il fallait montrer que  $X_s$  était un compact l'ont globalement bien fait (même si le fait que  $\overline{U_n}$  soit fermé n'a pas toujours été indiqué). Par contre, montrer que le maximum était atteint sur  $X_s \cap U_n$  a été trop souvent bancal.

**Q13.** Beaucoup de candidats voient qu'il faut utiliser le théorème d'optimisation sous contrainte mais oublient de bien rappeler et/ou vérifier les hypothèses du théorème. C'est important ! La stricte positivité de  $\lambda$  n'a pas souvent été justifiée.

**Q14.** Une question sélective. Beaucoup n'ont pas vu le lien avec la question précédente. Certains ont démontré cette inégalité (classique) directement ce qui n'était pas l'objet de la question.

**Q15.** Idem **Q11**.

**Q16.** Idem **Q12**.

**Q17.** Idem **Q13**.

**Q18.** La première partie a été réussie. Beaucoup de candidats n'ont malheureusement pas tenté la fin de la question (peut-être perdus par les notations).

**Q19.** Beaucoup de candidats ont tenté d'utiliser directement la convexité (à juste titre) mais il fallait l'utiliser sur  $((k+2)/(k+1))^{k+1}$ .

**Q20.** Une question assez peu abordée.

**Q21.** Une question facile traitée par de nombreux candidats.

**Q22.** Beaucoup de candidats n'ont pas vu comment se servir de la question précédente pour arriver au résultat final.

### Inégalité de Carleman-Yang

**Q23.** Trop de candidats écrivent que si  $f \sim g$  alors  $e^f \sim e^g$ . À noter également que peu de candidats maîtrisent les manipulations de  $o(\cdot)$ . Finalement, cette question témoigne d'une rigueur souvent insuffisante dans la manipulation des comparaisons asymptotiques.

**Q24.** La plupart des candidats a bien vu qu'il fallait utiliser une récurrence forte. Par contre, la question sur le rayon de convergence n'a pas été traitée avec toute la rigueur attendue (un résultat souvent donné sans justification).

**Q25.** La gestion du problème en 0 n'a que trop rarement été abordée, de même que le caractère  $\mathcal{C}^\infty$  de la fonction  $\varphi$ .

Les quatre dernières questions n'ont été que très rarement réellement abordées.

### Conseils généraux

Voici quelques conseils généraux inspirés par la lecture des copies :

- bien réfléchir avant d'écrire et utiliser pour cela un brouillon, cela évitera une copie pleine de ratures et qui fait mauvaise impression au correcteur ;
- ne pas se précipiter et prendre le temps de donner tous les arguments nécessaires (hypothèses d'un théorème...) ce qui n'est pas toujours fait, y compris dans de bonnes copies ;
- ne pas utiliser des notions hors programme sans les redémontrer ;
- ne pas hésiter à utiliser un résultat d'une question précédente ;
- ne pas essayer de tromper le correcteur. Un calcul qui démarre mal et qui finit miraculeusement sur le résultat attendu est du plus mauvais effet.

### Conclusion

Le sujet de cette année était de longueur raisonnable. Cela a permis à certains candidats de quasiment traiter le sujet en entier et parfaitement.

Beaucoup de candidats ont semblé un peu désorientés par les trois parties bien distinctes du sujet et sans réelle partie introductive.

Nous ne saurions trop conseiller aux futurs candidats de bien travailler toutes les notions vues en cours (la deuxième partie utilisant l'optimisation sous contrainte n'a été pas très réussie) ainsi que de bien connaître les notions de première année.

Un bon nombre de copies étaient, cette année, relativement difficiles à corriger à cause de l'écriture (parfois à peine déchiffrable) ou de la présentation. Nous invitons les futurs candidats à faire un effort dans ce domaine afin d'éviter d'être pénalisés par un malus.