Les questions sont de difficultés variées. Certaines sont très proches du cours, d'autres demandent une bonne maîtrise des théorèmes, d'autres enfin sont vraiment difficiles. Elles ont permis aux candidats de montrer leurs diverses qualités. L'échelonnement des notes est très satisfaisant.
Une analyse détaillée des questions est présentée dans l'annexe E.

1.7.2 Conclusion

La maîtrise des techniques et des résultats du cours est indispensable pour réussir les concours. C'était particulièrement le cas pour ce sujet, qui demandait en particulier une bonne maîtrise de l'algèbre bilinéaire. Beaucoup de candidats ont su montrer leurs qualités sur des questions assez techniques.

Rappelons pour terminer que la qualité de la rédaction et la présentation sont prises en compte dans l'évaluation des copies. Les correcteurs apprécient notamment que les résultats soient soulignés, que les copies ne soient pas un jeu de piste et que les ratures soient propres ! Enfin, certaines copies écrites avec une encre gommable sont un peu difficiles à lire ; ce type de stylo est donc à éviter.

1.8 Mathématiques 2 - filière PSI

1.8.1 Présentation générale et intérêt scientifique du sujet

Le sujet avait trait à plusieurs modes d'approximation des lois de Poisson par des lois à support fini. Dans un premier temps (partie **I**), on étudiait la probabilité qu'une permutation d'un ensemble à n éléments soit un dérangement, par la méthode des séries entières génératrices, puis la loi du nombre X_n de points fixes d'une permutation d'un ensemble à n éléments. On démontrait, lorsque n tend vers $+\infty$, la convergence en loi de X_n vers la loi de Poisson de paramètre 1.
La deuxième partie du sujet étudiait une mesure effective de l'écart entre deux lois sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$: la mesure en question est la **distance de variation totale**, dont on montrait à la question 10 qu'elle vérifiait les axiomes d'une distance sur l'ensemble des familles positives sommables de somme 1 (que l'on peut identifier à l'ensemble des lois de probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$).
L'objectif essentiel, dans le reste du problème, était de quantifier la convergence observée en partie **I** au sens de cette mesure (questions 14 et 15), puis de faire de même pour l'approximation de la loi de Poisson de paramètre λ par la loi binomiale $\mathcal{B}(\backslash, \lambda/\backslash)$ (question 20) et l'approximation d'une loi de Poisson par une autre (question 22).
La stratégie, dans cette dernière partie, était de contrôler la distance de variation totale entre deux produits de convolution (opération sur les lois correspondant à l'addition de deux variables aléatoires entières indépendantes) en fonction des distances facteur à facteur. Les derniers résultats était obtenus par écriture de la loi binomiale $\mathcal{B}(\backslash, \lambda/\backslash)$ comme produit de convolution de n lois de Bernoulli de paramètre $\frac{\lambda}{n}$, et de la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ comme produit de convolution de n lois de Poisson de paramètre $\frac{\lambda}{n}$·.

1.8.2 Structure du sujet et questions souvent abordées

Le sujet pouvait être intégralement traité dans le temps imparti. Plusieurs candidats y sont essentiellement parvenus, ne lâchant des points que par quelques erreurs d'étourderie et imprécisions dans l'argumentation.
Les trois grandes parties présentaient des dépendances significatives entre elles. Le résultat de la question 5 intervenait dans les questions 12 à 15, tandis que l'objet introduit dans la partie **II**, à savoir la distance en variation totale, était d'usage constant dans la partie **III**.
La plupart des candidats ont tenté de traiter les toutes premières questions, puis la question 6, la question 8, les questions 10 à 12, puis 16 et 17. Le reste a moins souvent été abordé.
Beaucoup de candidats ont essayé de traiter un très grand nombre de questions, mais en survolant absolument tout. En général, ces copies ont reçu une note très faible. Le picorage est très fortement déconseillé : on attend au contraire un réel investissement des candidats dans le sujet.
Le jury relève unanimement un important relâchement dans la présentation des copies par rapport aux éditions précédentes. On déplore de nombreuses copies à la limite de la lisibilité, des copies dont la rédaction et les justifications sont quasi-absentes, d'autres truffées de fautes d'orthographe.
Dans certaines copies, il est rare de voir correctement quantifiées les propositions mathématiques énoncées : les objets du discours ne sont pas fixés.
Une analyse détaillée des questions est présentée dans l'annexe F.

1.8.3 Conclusion

L'observation générale est le manque de soin dans la vérification des hypothèses des théorèmes manipulés. L'exemple le plus flagrant de cette tendance est les produits de Cauchy (de séries entières ou de séries numériques), dont les hypothèses ne sont qu'épisodiquement rappelées, et encore plus épisodiquement vérifiées avec rigueur.
La rédaction des raisonnements de dénombrement met en général les candidats en grande difficulté. On est loin en la matière de l'excès de formalisme, bien au contraire : le plus souvent ces questions révèlent un franc manque de rigueur dans l'usage du vocabulaire.
Les questions de rayon de convergence sont rarement satisfaisantes : presque tous les candidats oublient de considérer la valeur absolue du terme général, beaucoup tentent de manipuler des inégalités entre les sommes de séries entières (sans que rien n'ait vraiment été bien justifié) pour conclure sur les rayons de convergence. On attendait des candidats une distinction claire entre la série entière (qui est une série de fonctions, ce qui équivaut à la donnée d'une suite de fonctions) et sa somme.
Enfin, on note beaucoup de passages en force de la part des candidats : sauts abrupts à la conclusion, étapes de calcul sans justification claire etc.
En définitive, les candidats disposant d'une maîtrise suffisante du programme et ayant bien intégré les attendus en termes de rédaction et de justification se sont très facilement détachés des autres.

F Mathématiques 2 PSI

Q1 - Le rappel du cardinal de $\mathcal{S}_n$ n'a pas été une grande difficulté pour les candidats. En revanche, l'exploitation précise de celui-ci pour en déduire la minoration $R \geq 1$ a très rarement été satisfaisante. Il est d'abord maladroit d'invoquer un théorème de comparaison avec le rayon de convergence de $\sum_n z^n$, puisque la source de cette comparaison, à savoir le caractère borné de la suite $\left(\frac{d_n}{n!}1^n\right)_n$, est directement lié à la définition officielle du rayon de convergence (telle qu'elle figure dans le programme de la filière PSI). Par ailleurs, les candidats se limitent très souvent à la majoration $d_n \leq n!$ et oublient presque toujours de citer la positivité de $\frac{d_n}{n!}$. Il est manifeste que le réflexe fondamental en la matière, à savoir que c'est le module du terme général qu'il faut prendre en compte, n'est pas ancré chez suffisamment de candidats.

Q2 - Cette question de dénombrement pose évidemment le problème du degré de rigueur attendu dans les explications. Le jury accordait la totalité des points aux candidats expliquant qu'ils partitionnaient l'ensemble des permutations à k points fixes selon l'ensemble de leurs points fixes, puis qui dénombraient clairement (mais sans nécessairement faire appel à la notion de bijection) que pour un sous-ensemble donné A de $[\![1, n]\!]$ de cardinal k, le nombre de permutation ayant A pour ensemble de points fixes est d_{n-k}. On n'attend donc pas des candidats un formalisme extrêmement rigoureux. Cependant, le jury est frappé des raisonnements souvent très vagues, et régulièrement confus, qu'il a pu lire. Nombre de candidats attribuent le qualificatif de dérangement à des points (alors que cela désigne un type de permutation) etc. Il est finalement rare de trouver une explication bien convaincante. Dans la conclusion, il fallait impérativement citer que la loi envisagée sur $\mathcal{S}_n$ était uniforme.

Q3 - Comme indiqué plus haut, cette question a mis en évidence le manque de soin dans la vérification des hypothèses du théorème sur le produit de Cauchy de deux séries entières. On attendait aussi un minimum d'explication pour la formule $\sum_{k=0}^{n} P_n(X_n = k) = 1$, le caractère uniforme de la probabilité sur l'univers envisagé était parfaitement hors-sujet pour ce point, et son rappel n'a fait que créer chez le jury la suspicion d'un manque de compréhension de la situation par les candidats concernés. Enfin, pour la conclusion sur le rayon de convergence, on voit une proportion très importante de candidats annoncer que le rayon de convergence du produit de Cauchy est systématiquement le minimum des rayons de convergence des deux séries ainsi multipliées, ce qui est une erreur classique. Trop rarement, l'observation judicieuse que $s \underset{1^+}{\longrightarrow} +\infty$ n'est pas accompagnée d'un raisonnement fondé sur la continuité de la somme d'une série entière sur son intervalle ouvert de convergence.

Q4 - Il y avait deux méthodes possibles. La plus directe consistait à écrire $s(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$ et à utiliser un nouveau produit de Cauchy pour conclure grâce à l'unicité du développement en série entière. L'autre méthode, plus directement suggérée par l'énoncé, consistait à comparer les développements en série entière des deux membres de $(1-x)s(x) = e^{-x}$ pour aboutir à une relation de récurrence vérifiée par $\left(\frac{d_n}{n!}\right)_n$. Cette deuxième méthode, plus élémentaire sur le papier, a pourtant conduit à de nombreuses erreurs ou blocages du fait de la nécessité d'être très précis sur les indices des sommes et l'exploitation de la relation de récurrence.

Q5 - On attendait que soient cités précisément les résultats antérieurs utilisés, y compris la référence aux questions où ils avaient été obtenus.

Q6 - On attendait d'abord que les candidats citent clairement que U_i est à valeurs dans $\{0, 1\}$. Quant au calcul de $P_n(U_i = 1)$, il a très souvent donné lieu à des raisonnements vagues qui n'étaient pas fondés sur une utilisation précise de la loi de probabilité envisagée. Ici, la seule façon d'obtenir le résultat était de dénombrer les permutations fixant le point i, ce qui n'a que rarement été bien fait. Le problème s'est retrouvé, exacerbé, pour le calcul de la loi de U_iU_j, que la plupart des candidats se retrouvent incapables de calculer correctement faute d'avoir bien situé la difficulté (à savoir dénombrer les permutations fixant i et j à la fois).

Q7 - Le jury est satisfait de constater que beaucoup de candidats pensent à écrire X_n comme somme des U_i. Cette stratégie fondamentale à l'étude de lois de comptage semble donc acquise par la plupart des candidats. Beaucoup plus problématique a été la suite des raisonnements, puisqu'un très grand nombre de candidats postulent l'indépendance des U_i, voire annoncent que X_n suit une loi binomiale sans envisager cette indépendance (pourtant indispensable). Pourtant, il n'en est rien, les variables U_i présentant une véritable dépendance, ce qui est à la fois illustré par le résultat de la question précédente et par l'observation du premier cas non trivial ($n = 2$, où l'on observe que $U_1 = U_2$!). En outre, la loi de X_n était donnée à la question **5**, il n'était donc pas bien difficile de noter qu'elle différait profondément d'une loi binomiale. Quant à ceux qui avaient évité le piège des fausses indépendances, seul leur restait comme obstacle le calcul de la variance : le taux de réussite pour cette partie est très faible, tous types d'erreurs étant relevés : mauvaise formule pour la variance d'une somme (à noter qu'il était légèrement plus court ici de calculer l'espérance du carré plutôt que la variance), dénombrement incorrect des parties à deux éléments de $[\![1, n]\!]$, ou pour les couples d'éléments distincts.

Q8 - Il n'y a pas de raison *a priori* pour que la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(X_n = k)$ existe, et il est donc incorrect de démarrer une résolution par « $y_k = \cdots$ ». En général, la loi de Poisson de paramètre 1 est correctement reconnue.

Q9 - La difficulté principale de cette question était de comprendre le sens précis de l'indication. Presque aucun candidat n'a compris qu'on attendait de reconnaître $G_{X_n}(s)$ comme la somme partielle de rang n d'une série produit de Cauchy, ce qui était le point de vue aboutissant de la manière la plus simple et directe à la solution. Plusieurs candidats ont néanmoins su résoudre différemment la question, soit en réalisant des interversions (licites) de sommes, soit grâce à un théorème de double-limite correctement employé (une difficulté étant que la variable pour les fonctions envisagées était ici l'entier n, mais on pouvait s'appuyer sur le théorème au programme au prix de l'introduction d'une partie entière afin de donner un sens aux quantités manipulées pour une variable réelle $x \geq 0$ que l'on tentait de faire tendre vers $+\infty$).

Q10 - Cette question a posé peu de difficultés, mais on attendait une rédaction soigneuse – sans être exagérément délayée – des différents points, et en particulier de ne pas oublier l'implication réciproque dans le deuxième point. La positivité de la distance est souvent obtenue de manière exagérément compliquée, alors qu'il suffisait d'invoquer la positivité du terme général. Trop peu de candidats s'interrogent sur la convergence des séries manipulées.

Q11 - Cette question assez facile a donné lieu a une quantité d'erreurs assez surprenante. Beaucoup de candidats concluent à une distance nulle, sans visiblement que cela ne leur semble contradictoire avec le deuxième point de la question précédente.

Q12 - Cette question a illustré un manque de rigueur assez préoccupant chez une large majorité de candidats : en effet ceux-ci lèvent le problème du signe dans $|(1 - \lambda) - e^{-\lambda}|$ sans aucune explication, et ne se préoccupe de l'inégalité $1 - e^{-\lambda} \leq \lambda$ que quelques lignes plus loin ! Pour cette dernière, indiquer qu'elle est vraie « par convexité » et sans autre forme de procès ne fait que laisser planer le doute sur l'honnêteté des candidats concernés. On rappelle que l'inégalité $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geq 1 + x$ figure explicitement au programme, et qu'il était donc judicieux de la citer sous cette forme puis d'indiquer qu'on l'applique à $-\lambda$. Pour la dernière inégalité, contrôler la positivité de λ, puis la citer, avant de multiplier l'inégalité $1 - e^{-\lambda} \leq \lambda$ membre à membre n'est visiblement pas un réflexe suffisamment ancré. Pour ceux n'ayant pas repéré la convexité, on note une grande quantité d'erreurs dans les calculs de dérivées (et souvent aussi un manque de clairvoyance dans le choix de la fonction à étudier : ici s'inquiéter de $\lambda \mapsto \lambda^2 - (1 - e^{-\lambda})\lambda$ n'était pas particulièrement intelligent).

Q13 - L'identité $P_n(X_n = k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}$ n'était établie que pour $k \in [\![0, n]\!]$, il était donc hors de question de l'utiliser sans explication en dehors de ce domaine de validité. D'autant plus que la signification de la notation $\sum_{i=0}^{m} a_i$ lorsque $m < -1$ ne fait pas l'objet d'un réel consensus dans la communauté mathématique : considérer que cette somme est nulle car signifiant une somme indexée sur l'ensemble (vide) des entiers i vérifiant $0 \leq i \leq m$ est séduisant mais pose le double-problème de violation de la relation de Chasles et de l'incohérence avec la convention correspondante sur les intégrales orientées (l'intégrale $\int_0^{-2} x^2 \, \mathrm{d}x$ n'est pas nulle, n'est-ce pas ?). En définitive, il était indispensable de dissocier le cas $k \leq n$ du cas $k > n$ dans l'écriture de la somme, ce qui était presque le seul enjeu de cette question.

Q14 - Comme pour la question 12, le jury est parfois gêné de constater que les candidats multiplient des inégalités membre à membre sans jamais citer la positivité des termes. Une minorité des candidats parvient à comprendre comment majorer simplement le terme général $\frac{1}{k!}$, peu citent la convergence de la série majorante avant de sommer les inégalités. Pour l'équivalent, l'occasion était donnée aux candidats d'utiliser le théorème des gendarmes pour les équivalents, innovation de la récente réforme des programmes de PCSI/PSI dont fort peu ont pensé à se saisir. Un nombre trop élevé de candidats trouve un équivalent nul sans remord visible (un équivalent nul n'est pourtant possible que pour une suite nulle à partir d'un certain rang, ce qui n'est évidemment pas le cas ici).

Q15 - Le jury a été agréablement surpris de voir un nombre substantiel de réponses correctes à cette question, avec une grande variété de solutions. Il n'était pas indispensable d'appliquer le théorème des séries alternées pour majorer $\left|\sum_{i=n-k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!}\right|$, mais si on le faisait il fallait correctement en citer les hypothèses ! Attention, une nouvelle fois, de ne pas oublier de citer la positivité de $d_{VT}(p_{X_n}, \pi_1)$ avant de conclure à la domination (alternativement, on pouvait majorer la valeur absolue de $d_{VT}(p_{X_n}, \pi_1)$).

Q16 - Il ne fallait pas oublier de signaler (c'était implicitement admis dans l'énoncé) que $x * y$ était à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Pour le reste, il manque très souvent les hypothèses précises du théorème sur les produits de Cauchy de séries numériques, ainsi que des explications claires à ce sujet (les convergences absolues que l'on doit vérifier nécessitent de rappeler la positivité des séries en présence). À noter qu'aucun théorème au programme ne concerne directement les produits de Cauchy pour les séries à termes positifs.

Q17 - C'était quasiment une question de cours, on attendait donc des candidats qu'ils indiquent précisément à quel moment du calcul ils utilisaient l'indépendance des variables aléatoires X et Y.

Q18 - Question élémentaire. Trop souvent les candidats oublient de citer la posivitité de y et u au moment d'appliquer l'inégalité triangulaire, ce qui était pourtant crucial.

Q19 - On ne pouvait pas se contenter des majorations $y \leq 1$ et $u \leq 1$, il fallait utiliser $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n = 1 = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, via un produit de Cauchy. Une nouvelle fois, le jury est très souvent confronté à un déluge de calculs injustifiés (en particulier, le point crucial consistant à s'appuyer sur un produit de Cauchy de séries numériques ; très souvent le mot « produit de Cauchy » est absent, et il est exceptionnel de lire une justification du fait que le théorème associé est effectivement appliquable).

Q20 - Cette question nécessitait une large autonomie. Le jury n'a pas tenu rigueur aux candidats annonçant que toute variable suivant $\mathcal{B}(\backslash, \lambda)$ est somme de n variables de Bernoulli indépendantes de paramètre λ (c'est pourtant faux !). Pour éviter ce genre d'écueil, le raisonnement par récurrence s'avérait particulièrement adapté, à la difficulté près qu'il fallait étudier le produit de convolution de la loi $\mathcal{B}(\lambda)$ par la loi $\mathcal{B}(\backslash, \lambda)$, ce qui n'est pas particulièrement aisé. À noter qu'il est clair dans le programme que l'utilisation directe la fonction génératrice d'une loi de Poisson n'est pas autorisée, les candidats devant seulement « savoir la retrouver » (ce qui ne coûte que trois lignes de calcul tout au plus, effort qui n'est peut-être pas complètement insurmontable pour les candidats).
Q21 - Beaucoup de candidats obtiennent la partie facile de la question, à savoir la convergence vers 0 de la distance en variation totale d'une loi binomiale $\mathcal{B}(\backslash, \alpha/\backslash)$ vers la loi de Poisson $\mathcal{P}(\alpha)$. En revanche, presque aucun candidat ne parvient à en déduire précisément la convergence annoncée (alors qu'il suffisait de majorer le terme de rang k de la somme par la somme totale !). À noter que la méthode n'était pas ici imposée, il était donc possible d'obtenir le résultat par un simple retour à la définition d'une loi binomiale : cependant, les candidats s'étant engagés dans cette voie – qui figurait probablement dans leur cours – ont le plus souvent échoué.
Q22 - Un tout petit nombre de bonnes réponses à cette question, dont les ressorts étaient largement semblables à ceux de la question 20.

RETOUR