Q6 - Question très élémentaire, souvent imparfaitement traitée. Rappelons que le caractère continu par morceaux nécessite l'existence de limites à gauche et à droite aux bornes. Pour la parité de $|q|$, il faut distinguer le cas des entiers.

Très peu de candidats ont le réflexe de tracer un ou deux graphes. Les correcteurs ont apprécié et valorisé cette initiative.

Q7 - On attend le caractère borné de q, ainsi qu'une étude du comportement de la fonction au voisinage de $+\infty$.

Q8 - Il est nécessaire ici de découper l'intégrale en morceaux, soit en rédigeant une récurrence, soit en utilisant une somme. Le calcul n'est bien mené que chez une petite moitié de candidats.

Q9 - On attend ici une majoration effective pour le premier point, un découpage et un passage à la limite utilisant la question 8 et la formule de Stirling pour la suite.

Q10 - On utilise ici une permutation série intégrale soit avec le théorème de sommation L^1, soit avec le théorème de convergence dominée appliqué aux sommes partielles. Un calcul uniquement formel était faiblement récompensé.

Q11 - Cette question est très difficile. Les correcteurs ont valorisé toutes les initiatives prises par les candidats.

Q12 - Question difficile demandant l'utilisation du théorème de continuité des intégrales à paramètre, avec un prolongement à la limite. Beaucoup de candidats ont compris qu'il fallait appliquer ce théorème et l'on appliqué assez correctement sur $\mathbb{R}^{+*}$. La continuité en 0 est plus délicate.

Q13 - On cherche à appliquer le théorème des séries alternées. Une faute s'était glissée dans le signe de $u_k(t)$ et les candidats qui l'ont signalée ont été récompensés.

Q14 - Question traitée par une poignée de candidats. On utilise la convergence uniforme et la continuité pour passer à la limite dans l'intégrale.

Q15 - Question peu abordée, sans difficulté particulière.

Q16 - Question de synthèse utilisant les résultats précédents et nécessitant l'utilisation précise de développements asymptotiques.

Q17 - C'est une question de dénombrement, pour laquelle des arguments concis mais précis sont attendus.

Q18 - La question est assez élémentaire, mais on a vu beaucoup de coefficients de la série entière dépendant de z.

La suite du problème est très peu abordée.

1.7 Mathématiques 2 - filière PSI

1.7.1 Intérêt scientifique et structure du sujet

Le sujet portait principalement sur l'analyse asymptotique des solutions réelles d'un système différentiel homogène à coefficients réels constants. Le résultat principal, démontré dans la partie **IV**, indique que

lorsque la matrice A d'un tel système est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ (semi-simple, selon la terminologie du sujet), une condition nécessaire et suffisante pour que toutes les solutions réelles soient de limite 0 en $+\infty$ est que toutes les valeurs propres de A soient de partie réelle strictement négative, autrement dit que le polynôme caractéristique de cette matrice soit de Hurwitz (notion définie et étudiée en partie **III**).
Le sujet ne se limitait pas à une démonstration du résultat précédemment cité, mais établissait plusieurs résultats en lien avec les notions étudiées.

- Dans la partie **I**, on donnait une caractérisation des matrices réelles semi-simples en termes de réduction au sens réel sous une forme diagonale par blocs.
- Dans la partie **II**, on caractérisait la diagonalisabilité d'un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie en termes des sous-espaces stables par un tel endomorphisme (plus précisément, par le fait que tout sous-espace vectoriel de E possède un supplémentaire stable par l'endomorphisme en question). Il est à noter que ce résultat n'a rien de spécifique au corps des complexes et vaut aussi sur le corps des réels (et même d'autres situations, mais cela déborde du cadre du programme). Au passage, la terminologie « semi-simple » s'applique en général aux endomorphismes pour lesquels tout sous-espace vectoriel *stable* (et non tout sous-espace vectoriel tout court) possède un supplémentaire stable.
- Dans la partie **III**, on caractérisait les polynômes de Hurwitz à l'aide du signe de leurs coefficients ainsi que du signe des coefficients d'un deuxième polynôme formé à partir des sommes deux à deux des racines du polynôme initial.

Les trois premières parties étaient totalement indépendantes les unes des autres, alors que la dernière partie n'utilisait que les résultats de la première.
Le sujet était plutôt long et présentait plusieurs questions demandant une grande autonomie, principalement la question 6 (où l'on n'a presque pas vu de réponse vraiment satisfaisante) et la fin de la dernière partie. Beaucoup de candidats ont abordé un très grand nombre de questions dans les trois premières parties, et en général les deux premières questions de la quatrième.

1.7.2 Remarques générales sur les fautes rencontrées

La partie **II** a malheureusement mis en évidence une compréhension très superficielle de l'algèbre linéaire, la plupart des candidats multipliant les erreurs graves. En particulier :

- étant donné une base finie **B** d'un espace vectoriel E et un sous-espace vectoriel F de E, il n'existe en général aucune base de F extraite de **B** ! ! En effet, si *a contrario* ce principe (faux) était vérifié, alors E ne pourrait posséder qu'une quantité finie de sous-espaces vectoriels, ce qui est grossièrement faux dès que la dimension de E est au moins égale à 2 ! Pire, dès que F est un sous-espace vectoriel strict de E, il existe une base de E dont *aucun* vecteur ne figure dans F (grâce au théorème de la base extraite - le vrai ! - il suffit pour cela de constater que $E \setminus F$ est une partie génératrice de E, ce qui se démontre très facilement) ;

- dans un ordre d'idée voisin : si un supplémentaire de F peut effectivement être construit par extraction de la base $\mathbf{B}$ (ce qui est précisément ce qu'indique le théorème de la base incomplète, une fois appliqué à une base de F), il ne suffit pas de sélectionner les vecteurs de $\mathbf{B}$ en dehors de F pour obtenir une base d'un tel supplémentaire (en effet, selon le principe cité plus haut, il se peut que, bien que F soit un hyperplan de E, aucun des vecteurs de $\mathbf{B}$ ne figure dans F : faut-il donc croire que E est un supplémentaire de F dans E ?) ;
- le jury ne peut être qu'agacé lorsque les candidats parlent « du » supplémentaire d'un sous-espace vectoriel, puisque sauf cas trivial plusieurs supplémentaires existent pour un sous-espace vectoriel donné. Il serait aussi profitable que les candidats cessent de croire qu'un nombre complexe ne puisse pas être réel ! Les nombres réels sont des nombres complexes.

Le Concours Commun Mines-Ponts sélectionne de futurs ingénieurs, et qu'il s'agisse de Mathématiques, de Sciences Physiques, d'Ingénierie, etc, la maîtrise et la précision du langage sont des qualités essentielles attendues.

Le jury constate globalement, et s'attriste, que dès que l'on sort de quelques questions bien répétées dans l'année (typiquement, la question 1 et l'amorce de la 2), une grande difficulté est observée à mettre en place un raisonnement structuré résolvant patiemment toutes les difficultés rencontrées. De nombreuses réponses montrent une négligence pour les bases de la rédaction en Mathématiques. Par exemple, lorsqu'une question est formulée « montrer que si A alors B » l'énoncé ne tient nullement A pour acquis (ou supposé) et il appartient au candidat de faire lui-même l'hypothèse explicite (« On suppose A »).

La question 4 a mis en évidence des lacunes logiques criantes chez bon nombre de candidats, qui tentent vainement de montrer l'équivalence entre semi-simplicité et l'hypothèse (i), puis l'équivalence entre semi-simplicité et l'hypothèse (ii). Il était absurde de tenter de démontrer cela, d'autant plus qu'il était normalement évident que (i) et (ii) ne sont pas équivalentes (et même incompatibles !) : tout cela démontre un manque inquiétant de bon sens logique.

Une des subtilités du sujet résidait dans le fait que, pour les questions 2, 3 et 6, la réduction dusse se faire sur le corps des réels et non des complexes. De nombreux candidats sont tombés dans cet écueil. Un petit nombre de candidats connaissaient le résultat classique voulant que deux matrices carrées réelles sont semblables sur $\mathbb{R}$ dès qu'elles le sont sur $\mathbb{C}$, et ont redémontré ce résultat au moment opportun.

Enfin, les questions en apparence les plus simples ont été souvent très mal réussies. Par exemple, on voit très peu souvent de justifications précises dans la question 7 (beaucoup de candidats jetant quelques hypothèses à la tête du correcteur sans faire le tri et indiquer quelle hypothèse sert à quel moment du raisonnement), et par exemple, on voit très peu de justifications réellement détaillées du fait que $F \cap \mathrm{Vect}(x_k) = \{0\}$. La question 15, qui était fondamentalement très élémentaire (question de niveau première année), n'a été réussie que dans un nombre infime de copies, la plupart des candidats se révélant incapables d'écrire une formule correcte pour les coefficients du produit de deux polynômes lorsque tous les coefficients n'ont pas été définis !

1.7.3 Analyse détaillée des questions

Q1 - Ce n'était pas une entrée en matière évidente car le polynôme caractéristique n'était pas à racines simples. Il fallait donc examiner la dimension du sous-espace propre associé à 2, ce qui a été souvent fait correctement. Il n'était pas nécessaire de calculer le moindre sous-espace propre, on pouvait se contenter d'observer que $A \neq 2I_2$, empêchant au sous-espace propre associé à 2 d'être de dimension 2. Les erreurs à signaler : confusion entre taille des matrices carrées et dimension de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, confusion entre sous-espace propre réel et sous-espace propre complexe (s'il s'agit de démontrer l'absence de diagonalisabilité sur $\mathbb{C}$, on doit considérer le dernier type de sous-espace propre). Dans l'ensemble, on observe toutefois un taux de réussite satisfaisant sur cette question.

Q2 - La première partie de la question (semi-simplicité parce que le polynôme caractéristique est simplement scindé) a été bien réussie en général. À noter que l'usage du théorème de Cayley-Hamilton n'était pas nécessaire ici (le critère cité précédemment figure au programme). La réduction sous forme « matrice de similitude » a été ensuite mal réussie. Il était possible d'obtenir une telle réduction sans calculer le moindre vecteur propre de B, ce qui avait l'avantage de fournir un galop d'essai pour la question 3 au prix d'un raisonnement délicat pour montrer l'inversibilité de Q, mais la plupart des candidats se sont lancés dans la recherche d'un vecteur propre pour B. Souvent, ils se sont arrêtés là et n'ont pas trouvé de matrice Q appropriée : nous pensons que les candidats ont coincé sur la recherche de Q par défaut de compréhension géométrique de la situation (ce sont les colonnes de Q qui étaient pertinentes). On a enfin vu trop de résultats parachutés sans explication (typiquement, les candidats donnent a et b sans produire la moindre matrice Q, ce qui n'était pas bien difficile par simple observation de la question 3) ; enfin, on a vu de nombreuses erreurs sur la résolution de systèmes linéaires à coefficients complexes.

Q3 - Les candidats ayant résolu la question 2 sans recherche explicite d'un vecteur propre étaient ici avantagés, mais ils étaient souvent pénalisés par le défaut d'une démonstration de l'inversibilité de la matrice Q construite. On rappelle aux candidats que l'égalité des polynômes caractéristiques ne garantit en rien la similitude des matrices concernées.

Q4 - Comme indiqué dans le préambule, cette question a donné lieu à de très nombreuses fautes logiques choquantes. La difficulté principale résidait dans l'analyse de la situation de semi-simplicité, en examinant les situations possibles pour le polynôme caractéristique. Beaucoup trop de candidats ont signalé leur incompréhension du cours en indiquant que le polynôme caractéristique d'une matrice diagonalisable est nécessairement à racines simples. Trop de candidats jugent évident que si une matrice réelle est $\mathbb{C}$-diagonalisable et a son polynôme caractéristique scindé sur $\mathbb{R}$, alors elle est $\mathbb{R}$-diagonalisable : cet énoncé est certes vrai mais sa démonstration est bien plus subtile que ce que croient les candidats.

Q5 - Dans la mise en place des hypothèses (introduire P et M, puis la forme diagonale par blocs de M), on aimerait que les candidats prennent la peine d'expliciter les notations et non de renvoyer de manière cavalière « aux notations de l'énoncé » (ce qui n'a pas grand sens puisqu'on parle là d'une définition générale et non des objets précis manipulés dans cette question). La question se ramenait ensuite à établir que les blocs de similitude $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$, sont tous $\mathbb{C}$-diagonalisables. Là, le jury a été très étonné de la lecture singulière que les candidats font de l'énoncé de la question 3 : en effet, le résultat ne serait utilisable qu'à condition de démontrer l'*existence* d'une matrice de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont $a + ib$ et $a - ib$. Mais où les candidats ont-ils démontré cette existence ? Ensuite, on attendait une diagonalisation explicite à partir d'une diagonalisation de chacun des blocs diagonaux. Beaucoup trop de candidats se sont contentés d'explications vagues, annonçant brutalement qu'une matrice diagonale par blocs diagonaux tous diagonalisables est toujours diagonalisable (oui mais pourquoi ?) ou encore se sont perdus dans des considérations géométriques mal maîtrisées (tentant maladroitement de « recoller » des bases de diagonalisation, mais sans avoir défini précisément les espaces sur lesquels ils travaillent).

Q6 - Cette question était très difficile. La plupart des candidats se sont arrêtés à l'expression du polynôme caractéristique : les erreurs sur ce point sont venues d'un défaut de prise en compte de la multiplicité des racines (il était, du reste, parfaitement acceptable de ne pas se préoccuper d'introduire les racines distinctes : écrire $\chi_N = \prod_{k=1}^{p}(X - x_k) \prod_{k=1}^{q}(X - z_k)(X - \overline{z_k})$ en précisant que les x_k sont réels, et les z_k complexes non réels, était parfaitement satisfaisant). Le reste de la question n'a été abordé avec succès que dans un nombre réduit de copies ; il demandait une compréhension solide des mécanismes de la question 3. Une difficulté particulièrement coriace résidait dans le point suivant : étant donné une base de diagonalisation complexe $(X_1, \ldots, X_n)$ dans laquelle les p premiers vecteurs sont associés aux valeurs propres réelles, il n'y a aucune raison a priori pour que $X_1, \ldots, X_p$ soient des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, et en général il n'y a même aucune garantie pour que l'on puisse les remplacer dans la base par $\mathrm{Re}(X_1), \ldots, \mathrm{Re}(X_p)$. Vu la très grande subtilité de ce point, le jury a valorisé les rarissimes copies soulevant cette difficulté et admettant que les X_i pouvaient être *choisis* dans $\mathbb{R}^n$.

Q7 - Le taux de réussite de cette question est extrêmement décevant. Ici, l'argument le plus simple était de voir que si la condition à obtenir est fausse, alors F contient tous les vecteurs de E (stabilité par combinaison linéaire et caractère générateur de $(v_k)_k$), et on contredit ainsi l'hypothèse $F \neq E$. La deuxième partie de la question a été tout aussi mal réussie : une preuve détaillée était attendue, et beaucoup trop de candidats sont passés de $\lambda v_k \in F$ à $\lambda = 0$ sans explication suffisamment convaincante.

Q8 - L'axiomatique de $\mathbb{N}$ est souvent mal maîtrisée, les candidats oubliant trop fréquemment de montrer que $\mathcal{L}$ est non vide. Il fallait impérativement s'appuyer sur la question 7 pour montrer cette non-vacuité, et on ne pouvait pas se contenter de cette seule référence : la stabilité de $\mathrm{Vect}(v_k)$ utilise en effet le fait que v_k soit vecteur propre de u, ce qui n'était pas intervenu jusque-là.

Q9 - Beaucoup trop de candidats ont pris un supplémentaire quelconque de F et ont tenté de montrer qu'il était stable par u. Ce n'est que dans une petite minorité de copies que l'on a vu des tentatives, le plus souvent totalement inabouties, de s'appuyer sur la question 8. À noter qu'une autre solution possible consistait à créer G directement grâce au théorème de la base extraite. Comme déjà indiqué, ce théorème est souvent très mal compris, et les démonstrations fondées sur une version fausse de ce théorème n'ont jamais été validées par le jury.

Q10 - L'indication suggérait de raisonner par l'absurde, en construisant un hyperplan contenant tous les vecteurs propres (la construction très précise d'un tel hyperplan manque à presque toutes les copies) puis en obtenant grâce à l'hypothèse un supplémentaire de cet hyperplan qui soit stable par u. Un tel supplémentaire est alors une droite stable, on obtient donc une contradiction en prenant un vecteur non nul de cette droite. Une autre possibilité consistait à prendre directement un supplémentaire de la somme des sous-espaces propres, puis d'examiner l'endomorphisme induit par u sur celui-ci, utilisant le théorème de d'Alembert-Gauss pour en trouver une valeur propre. Le jury a bien entendu accepté cette forme de raisonnement, qui ignorait l'indication (celle-ci était formulée de manière propositionnelle et non impérative) en évaluant bien sûr toutes les étapes de la démonstration. Les candidats ont oublié trop souvent la deuxième partie de la question, et bien peu ont fait l'effort de citer précisément ce qui permettait d'affirmer la réciproque (la combinaison des questions 7 à 9 d'une part, et enfin le cas des sous-espaces triviaux devait être cité car il était écarté dans ces questions).

Q11 - Cette question a été assez bien réussie, les mauvaises réponses étant dues à un manque de clarté dans les explications et de rigueur.

Q12 - Beaucoup de candidats ont opté pour des démonstrations beaucoup trop compliquées : ils ont trop souvent cherché à expliciter les diviseurs d'un polynôme de Hurwitz à partir d'un scindage sur $\mathbb{C}$, et ont presque systématiquement échoué dans cette quête. Pourtant, la définition de la divisibilité était rappelée et elle permettait de résoudre cette question en quelques mots à peine. Ici, la précision du langage était indispensable : non, les racines d'un diviseur de P ne sont pas les racines de P, mais seulement *des* racines de P en général !

Q13 - Une part des candidats a oublié l'irréductibilité ! Pour ceux ayant compris l'énoncé, on déplore parfois un manque d'attention à l'existence des objets (il fallait signaler l'existence de racines complexes ou les expliciter). Le jury est par ailleurs frappé du fait que les candidats ont choisi majoritairement les points de vue les moins efficaces : puisqu'ici les conditions portaient sur les racines, n'était-il pas *a priori* plus performant de partir d'une forme factorisée pour en tirer les conclusions attendues sur les coefficients ?

Q14 - Cette question était délicate. En effet, d'une part le résultat à démontrer n'était pas indiqué, d'autre part il était beaucoup plus direct de s'en sortir sans calculer le moindre coefficient de Q, en s'appuyant sur la question 11. Le fait de traiter le cas $n = 2$ aurait au moins pu permettre aux candidats d'avoir une vision nette de la forme factorisée de Q. Le jury déplore un nombre étonnant d'erreurs sur cette dernière (beaucoup de candidats écrivant un polynôme de degré 2 ou 3 !). Lorsqu'ils parviennent à une étude des racines de P, beaucoup trop de candidats ignorent l'éventualité qu'elles soient réelles. Beaucoup d'autres aussi écrivent des inégalités portant sur des nombres complexes, ce qui n'a aucun sens.

Q15 - Cette question a été très mal réussie. Très peu de candidats se sont révélés capables de donner une expression correcte des coefficients de AB en fonction des coefficients de A et B qu'ils avaient introduits (il était utile de les compléter par des coefficients nuls, ce qui a rarement été bien vu). Pour les rares qui sont parvenus à une expression correcte, la non-vacuité de la somme n'a presque jamais été abordée alors que c'était une difficulté centrale de la question. Que comprendre à l'affirmation : « les coefficients sont des sommes *et* produits de réels strictement positifs » ? Qu'est-ce donc qu'une « somme et produit » ? Enfin, une erreur commune a été de ne traiter que le cas où A et B ont le même degré !

Q16 - C'était la question de synthèse de cette partie. On a dénombré quelques bonnes réponses pour le sens direct, souvent limitées au fait que P est à coefficients strictement positifs s'il est de Hurwitz. La réciproque, qui ne nécessitait que le fait que Q soit à coefficients strictement positifs, n'a été que très exceptionnellement traitée.

Q17 - Il s'agissait d'une question de cours très élémentaire et le jury a été particulièrement attentif à l'articulation logique des raisonnements. On n'attendait aucunement un raisonnement par équivalences : il s'agissait de partir d'une solution arbitraire X de (S), de construire une solution de (S^*) telle que les coefficients de X soient des combinaisons linéaires de celles de Y. Trop fréquemment, le jury a vu des affirmations du type « on pose $Y = PX$ et $Y' = PX'$ », comme si Y et Y' représentaient deux variables sans lien entre elles ! On attendait ici une mention du fait que $Z \mapsto PZ$ est linéaire, si bien qu'il « commute » avec la dérivation.

Q18 - Ici un raisonnement par équivalences était indispensable, en précisant bien qu'on utilisait la reconnaissance des parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe (ainsi, dire « j'ajoute la ligne 1 du système à i fois la ligne 2 » n'est pas une justification suffisante car elle ne donne qu'une seule implication). On a vu ensuite une erreur critique sur la résolution de $z' = (a-ib)z$, la plus grande partie des candidats choisissant la constante multiplicative dans $\mathbb{R}$ et non dans $\mathbb{C}$, ce qui était parfaitement absurde vu le contexte. On n'a presque jamais lu de solution correcte à la suite de la question, puisque cela nécessitait d'avoir explicité une matrice Q adéquate à la question 2.

Q19 - Cette question a été le plus souvent bâclée : la plupart des candidats qui ont tenté de l'aborder ont commis de graves contre-sens sur la notion de matrice semi-simple (ils ont ignoré le cas réel diagonalisable, typiquement). Très souvent, le caractère nécessaire de la condition trouvée n'a pas été démontré rigoureusement.

Q20 - Cette question a été traitée avec succès dans un tout petit nombre de copies, aucune erreur typique n'est à signaler.

Q21 - À part des copies très exceptionnelles, les solutions se sont résumées à démontrer l'implication la plus évidente, celle qui faisait l'objet de l'indication. Le reste a souffert d'une absence de recul sur les résultats démontrés antérieurement.