1.6 Mathématiques 1 - filière PSI

1.6.1 Généralités et présentation du sujet

Le sujet porte sur l'étude asymptotique du nombre de partitions d'un entier n, c'est-à-dire du nombre de décompositions de n en somme d'entiers, en ne tenant pas compte de l'ordre des termes.

C'est un problème d'analyse, avec quelques questions de dénombrement. Pratiquement toutes les notions et les outils développés en analyse pendant les deux années de classes préparatoires sont utilisés : séries, séries de fonctions, séries entières, intégrales à paramètre discret ou continu, interversion de symboles, convergence dominée, étude asymptotique.

Les questions sont de difficultés variées. Certaines sont très proches du cours, d'autres demandent une bonne maîtrise des théorèmes, d'autres enfin sont vraiment difficiles.

Le sujet est très long et les deux dernières parties n'ont pour ainsi dire pas été abordées. Les trois premières, relativement indépendantes et traitant de thèmes divers, ont cependant permis aux candidats de montrer leurs qualités, et d'étalonner les copies de manière très satisfaisante.

La maîtrise des techniques et des résultats du cours est indispensable pour réussir les concours. Beaucoup de candidats l'ont heureusement compris.

1.6.2 Analyse détaillée des questions

Q1 - On demande ici la convergence d'une série, qui est en fait une série entière. Divers arguments, corrects, ont été donnés : utilisation du lemme d'Abel afin de déterminer le rayon de convergence de la série entière, critère de d'Alembert pour les séries ou les séries entières (avec des modules et des limites), comparaison à une série géométrique... Pour la variable réelle, on reconnait une série bien connue, dont on peut donner directement la somme.

Q2 - Beaucoup de confusions chez les candidats. Peu d'entre eux reconnaissent une série entière dont le rayon est strictement supérieur à 1. Certains appliquent le théorème de régularité $\mathcal{C}^1$ des séries de fonctions en confondant « inclus dans $[-1,1]$ » et « incluant $[-1,1]$ ». D'autres enfin dérivent terme à terme sans aucune justification.

Q3 - On ne peut ici utiliser le logarithme principal. On attend l'argument classique : une fonction dérivable sur un intervalle et de dérivée nulle est constante.

Q4 - Pour le premier point, on retrouve l'expression donnée à la question 1. Pour le second, on attend deux arguments : z^n est dans le disque D et $-\ln(1-|z|^n)$ est équivalent à $|z|^n$ lorsque $n \to +\infty$.

Q5 - Peu de candidats ont traité correctement cette question, a priori facile. Le premier point est souvent faux : la plupart des candidats justifient la non nullité de $P(z)$ par le fait que l'exponentielle est à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$, ce qui est évidemment faux sur $\mathbb{C}$. Pour le second, on attend l'utilisation de sommes partielles. Enfin, pour le dernier, il faut préciser que les termes sont dans $[0,1[$.

Q6 - Question très élémentaire, souvent imparfaitement traitée. Rappelons que le caractère continu par morceaux nécessite l'existence de limites à gauche et à droite aux bornes. Pour la parité de $|q|$, il faut distinguer le cas des entiers.
Très peu de candidats ont le réflexe de tracer un ou deux graphes. Les correcteurs ont apprécié et valorisé cette initiative.

Q7 - On attend le caractère borné de q, ainsi qu'une étude du comportement de la fonction au voisinage de $+\infty$.

Q8 - Il est nécessaire ici de découper l'intégrale en morceaux, soit en rédigeant une récurrence, soit en utilisant une somme. Le calcul n'est bien mené que chez une petite moitié de candidats.

Q9 - On attend ici une majoration effective pour le premier point, un découpage et un passage à la limite utilisant la question 8 et la formule de Stirling pour la suite.

Q10 - On utilise ici une permutation série intégrale soit avec le théorème de sommation L^1, soit avec le théorème de convergence dominée appliqué aux sommes partielles. Un calcul uniquement formel était faiblement récompensé.

Q11 - Cette question est très difficile. Les correcteurs ont valorisé toutes les initiatives prises par les candidats.

Q12 - Question difficile demandant l'utilisation du théorème de continuité des intégrales à paramètre, avec un prolongement à la limite. Beaucoup de candidats ont compris qu'il fallait appliquer ce théorème et l'on appliqué assez correctement sur $\mathbb{R}^{+*}$. La continuité en 0 est plus délicate.

Q13 - On cherche à appliquer le théorème des séries alternées. Une faute s'était glissée dans le signe de $u_k(t)$ et les candidats qui l'ont signalée ont été récompensés.

Q14 - Question traitée par une poignée de candidats. On utilise la convergence uniforme et la continuité pour passer à la limite dans l'intégrale.

Q15 - Question peu abordée, sans difficulté particulière.

Q16 - Question de synthèse utilisant les résultats précédents et nécessitant l'utilisation précise de développements asymptotiques.

Q17 - C'est une question de dénombrement, pour laquelle des arguments concis mais précis sont attendus.

Q18 - La question est assez élémentaire, mais on a vu beaucoup de coefficients de la série entière dépendant de z.

La suite du problème est très peu abordée.

1.7 Mathématiques 2 - filière PSI

1.7.1 Intérêt scientifique et structure du sujet

Le sujet portait principalement sur l'analyse asymptotique des solutions réelles d'un système différentiel homogène à coefficients réels constants. Le résultat principal, démontré dans la partie **IV**, indique que