PSI

CONCOURS COMMUN INP

RAPPORT DE L'ÉPREUVE ÉCRITE

DE MATHÉMATIQUES

1/ COMMENTAIRE GÉNÉRAL SUR L'ÉPREUVE

Le sujet était composé de deux problèmes balayant une large partie du programme. Le premier problème était un problème d'analyse et de probabilités, surtout centré sur l'intégration. Il était question de démontrer une étape clé de la preuve du théorème de Moivre-Laplace. Le second problème portait sur l'algèbre linéaire et bilinéaire au travers de la décomposition QR.

Le premier problème était composé de 4 parties. Il a été l'occasion d'interroger les candidats sur les suites d'intégrales, la démonstration par récurrence, les changements de variables dans les intégrales, le théorème de convergence dominée, les lois de probabilités…

Le second problème était composé de 3 parties. Il était question de matrices de rang 1, de matrices nilpotentes, de polynôme annulateur, de diagonalisation, du théorème spectral, de matrices orthogonales au travers de projections et de symétries.

Les deux problèmes ont été abordés de manière équilibrée par la majorité des candidats avec une fin du problème d'analyse peu traitée dans l'ensemble. La « réussite » sur les deux problèmes est comparable. Le niveau des copies est décevant dans l'ensemble, hormis quelques rares bonnes copies. Il est à noter qu'un nombre non négligeable de copies sont une succession d'erreurs difficilement excusables à ce niveau.

Les copies moyennes montrent un niveau de maîtrise trop fragile de notions importantes du programme. À titre d'exemples, une partie non négligeable ne sait pas caractériser une matrice de rang 1 et beaucoup confondent un polynôme annulateur avec le polynôme caractéristique.

Le sujet était progressif et la plupart des questions formulées de manière à ce que les questions non traitées puissent tout de même être utilisées pour aborder la suite du sujet. L'une des conséquences des questions où l'on demande de prouver des affirmations est qu'un nombre significatif de candidats démarrent une preuve qui n'aboutit pas et se permettent de conclure qu'ils ont obtenu le résultat voulu. Notons que ce genre de tentative de " bluff " n'échappe pas aux correcteurs et est bien sûr sanctionnée.

2/ ANALYSE DETAILLÉE DES QUESTIONS

Q1 : bien traitée dans l'ensemble, même si la croissance (ou positivité) de l'intégrale n'est pas toujours citée. Quelques « énormité » étonnantes à ce niveau : confusion entre croissance de la suite et de la fonction intégrée, l'intégrale d'un quotient est égal au quotient des intégrales…

Q2 : mal réussie dans l'ensemble. Beaucoup tentent une intégration par partie mais n'aboutissent pas. D'autres tentent vainement une récurrence.

Q3 : Le calcul du produit est la plupart du temps vu, mais beaucoup concluent « par itération » sans écrire les récurrences. Le calcul de I_1 a posé des problèmes à certains, mais n'a pas empêché une partie d'entre eux d'affirmer aboutir au bon résultat.

Q4 : beaucoup de candidats pensent à utiliser la décroissance de la suite démontrée en question 1, mais peu justifient correctement le passage au quotient. Pour l'inégalité de droite, une partie significative des candidats utilisent l'expression de la question précédente, se lançant dans des calculs laborieux alors que la question Q2 permettait de conclure immédiatement.

Q5 : cette question est bien réussie par la grande majorité des candidats.

Q6 : le bon changement de variable est en général vu mais parfois posé de manière très peu rigoureuse entraînant des erreurs de calcul. En particulier, la division par $\sqrt{n}$ est parfois faite dans le mauvais sens.

Q7 : cette question testait la rigueur et la maîtrise des équivalents. Beaucoup de candidats pensent à l'écriture exponentielle. On trouve ensuite des limites égales à 0, à 1, des compositions d'équivalents par l'exponentielle sans justification, et souvent la bonne limite « si $0 \leq t \leq \sqrt{n}$ » et 0 sinon.

Q8 : l'étude de fonction menant à la première inégalité est souvent bien menée. L'application $x = -\frac{t^2}{n}$ est en générale vue mais moins bien rédigée.

Q9 : une grande partie des candidats s'arrêtent à la justification, parfois peu rigoureuse, de la convergence de K. Les plus à l'aise pensent ensuite à utiliser le théorème de convergence dominée, mais peu parviennent au bout du calcul sans erreur.

Q10 : les candidats qui abordent cette question savent en général donner l'expression de g. Parmi eux, certains arrivent à poursuivre en utilisant le théorème fondamental de l'analyse. En revanche, très peu parviennent à majorer correctement $|g(x)|$.

Q11 : question souvent laissée de côté, ou abandonnée après avoir obtenu une expression intermédiaire avec des factorielles.

Q12 : les quelques candidats qui abordent cette question ont vu le lien avec la question Q10, mais peu justifient correctement les hypothèses d'utilisation de la formule. Notons tout de même qu'une poignée de candidats terminent correctement la question.

Q13 : l'ensemble des valeurs prises par Z_n n'est pas bien vu en général. La plupart des candidats partent du principe que la variable aléatoire prend des valeurs entières, ce qui les conduit à raisonner à l'envers. Un peu plus de réussite dans le calcul de l'espérance pour ceux qui ont pensé à utiliser la linéarité.

Q14 : question peu traitée avec des représentations graphiques étonnantes.

Q15 et 16 : questions peu abordées avec assez peu de réussite pour ceux qui les ont traitées.

Q17 : question abordée par quelques copies. Les rares qui ont abordé cette question se limitent généralement à vérifier la première assertion.

Q18 : la notion de matrice de rang 1 n'est pas comprise par une partie significative des candidats. Pour certains, il s'agit d'une matrice qui possède n-1 colonnes nulles, pour d'autres c'est une matrice colonne. Ceux qui connaissent la notion de matrice de rang 1 parviennent généralement à donner au moins un argument partiel. Un certain nombre n'évoque pas la non nullité de X et Y, et certains posent X égal à la première colonne de A sans se soucier de sa nullité.

Q19 : beaucoup se contentent de montrer que le rang est inférieur ou égal à 1.

Q20 : ceux qui pensent à utiliser la question Q18 parviennent généralement à identifier la trace et s'en sortent. Certains candidats parviennent au résultat en effectuant les calculs à partir des coefficients de $A = XY^T$.

Q21 : la rédaction précise de la récurrence remplacerait avantageusement les arguments du type « par récurrence immédiate ». Une part significative prend le temps de démontrer la trivialité : $A^k = Tr(A)A^{k-1}$.

Q22 : question souvent bien traitée avec parfois des justifications trop rapides, et parfois seulement la partie « condition nécessaire » démontrée.

Q23 : cette question été l'occasion pour les candidats de montrer leur savoir-faire sur la diagonalisation de matrice. Les justifications sont cependant souvent trop lacunaires, imprécises, voire simplement fausses.

Q24 : un calcul simple réussi par une majorité de candidats. Les erreurs sont le plus souvent dues au facteur $\frac{1}{3}$ devant la matrice dans l'expression de A. Identifier un polynôme annulateur de A n'est toutefois par immédiat pour tous et on retrouve régulièrement $X^2 - I_3$ ou des $A^2 - I_3$, ce qui montre que la notion même de polynôme annulateur n'est pas comprise.

Q25 : bilan mitigé sur cette question. Certains utilisent correctement la question précédente (et parfois annoncent sans justification supplémentaire que les racines du polynôme trouvé précédemment sont « les » valeurs propres de A). D'autres se lancent dans le calcul du polynôme caractéristique et commettent trop souvent des erreurs de calcul. Beaucoup d'erreurs également dans le calcul des espaces propres.

Q26 : question souvent bien traitée. Certains s'en sortent par un argument théorique découlant du théorème spectral, d'autres par utilisation du produit scalaire.

Q27 : question très mal réussie. Une majorité de candidats répondent en utilisant le théorème spectral mais ne pensent pas à orthonormaliser la base obtenue à la question Q25.

Q28 : question laissée de côté ou justifiée souvent très rapidement.

Q29 : les candidats ne pensent pas toujours à utiliser un argument de dimension pour conclure à l'égalité des deux espaces. Pour la deuxième égalité, certains procèdent directement par équivalence. La rédaction est cependant souvent confuse et certains problèmes de nature d'objet apparaissent. On voit par exemple couramment l'écriture $\frac{1}{||V||^2}V^TV = 0$ pour la recherche du noyau.

Q30 : pour beaucoup de candidats, l'identification du noyau et de l'image suffisent à démontrer que l'application est un projecteur. Ceux qui ont bien traité la question y sont parvenus soit en montrant que $P_V^2 = P_V$, soit en étudiant la restriction de P_V à son image.

Q31 : beaucoup de confusions entre « Q_V est une matrice symétrique » et « Q_V est la matrice d'une symétrie ».

Q32 : la confusion de la question précédente se retrouve sur cette question. Certains utilisent correctement leur connaissance du cours et le fait que P_V est un projecteur.

Q33 : souvent correctement traitée par les quelques candidats qui l'ont abordée.

Q34 : question peu abordée et résultat souvent incorrect. Le petit nombre de candidats qui ont vu la bonne décomposition l'ont souvent donnée sans justification.

Q35 : un certain nombre de candidats se sont intéressés à cette question sans faire de lien avec la précédente. Ils reprennent l'expression de Q_V, se lancent dans un calcul mais n'aboutissent pas.

Q36 à 38 : questions abordées par très peu de candidats. On trouve des idées intéressantes dans les meilleures copies sans justifications complètes.