1.4 Mathématiques 1 - filière PC

1.4.1 Présentation du sujet

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons p_n le nombre de partitions de n, c'est-à-dire le cardinal de l'ensemble des n-uplets $(a_1, \ldots, a_n)$ tels que $\sum_{k=1}^{n} k a_k = n$. Le nombre p_n admet plusieurs interprétations : c'est, par exemple, le nombre de classes de conjugaison du groupe symétrique $\mathcal{S}_n$, ou le nombre de classes de similitude de matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Il est naturel de s'intéresser au comportement asymptotique de $(p_n)_{n \geq 1}$. En 1918, Hardy et Ramanujan ont établi l'équivalent

$$(1) \qquad p_n \sim \frac{\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)}{4\sqrt{3}\ n}.$$

Le problème est consacré à la démonstration du résultat légèrement plus faible :

$$(2) \qquad p_n = O\left(\frac{\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)}{n}\right).$$

Posons $p_0 = 1$ et notons D le disque ouvert de centre 0 et de rayon 1 de $\mathbb{C}$. La démonstration repose sur l'analyse de la fonction génératrice de la suite $(p_n)_{n \geq 0}$. Cette fonction est donnée par

$$(3) \qquad \forall z \in D, \qquad P(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n.$$

On montre dans la partie **C** de l'énoncé que

$$(4) \qquad \forall z \in D, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n = \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - z^k}.$$

Par ailleurs, on peut calculer p_n par la formule de Cauchy :

$$(5) \qquad \forall r \in]0,1[, \qquad p_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_{-\pi}^{\pi} P(re^{it})\, e^{-int}\ \mathrm{d}t.$$

Pour tirer parti de (5), il faut contrôler $P(z)$ pour $z \in D$ proche du cercle unité, ce qui est l'objet des parties **A, B, D**. Un choix judicieux de r ($r = \exp\left(-\frac{\pi}{\sqrt{6n}}\right)$) amène alors (2) (partie **E**). Une analyse plus poussée de l'intégrale conduirait à (1).

Le contrôle de $P(z)$ nécessite plusieurs étapes.

- Dans la partie **A**, on établit les développements suivants :

$$(6) \qquad \forall z \in D, \qquad P(z) = \exp\left(\sum_{n=1}^{+\infty} L(z^n)\right),$$

$$(7) \qquad \forall t \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad \ln(P(e^{-t})) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1-e^{-nt}).$$

Dans la première formule, L est la restriction à D de la fonction $z \mapsto -\ell(1-z)$, où ℓ est le logarithme principal. Le problème définit L par son développement en série entière :

$$(8) \qquad \forall z \in D, \qquad L(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{k}.$$

- Dans la partie **B**, on établit, en utilisant la relation (7), la formule de Stirling et le début de la formule d'Euler-Maclaurin, la formule asymptotique suivante :

$$(9) \qquad \ln(P(e^{-t})) = \frac{\pi^2}{6t} + \frac{\ln(t)}{2} - \frac{\ln(2\pi)}{2} + o(1).$$

On dispose ainsi d'un équivalent de $P(r)$ lorsque $r \in [0,1[$ tend vers 1.

- Dans la partie **D**, on majore $P(z)$ en fonction de $P(|z|)$ pour $z \in D$, au moyen d'inégalités élémentaires, de manière à établir que

$$(10) \qquad \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\frac{\pi^2 u}{6t^2}} \frac{P(e^{-t}e^{iu})}{P(e^{-t})}\,\mathrm{d}u \underset{t\to 0^+}{=} O\left(t^{3/2}\right),$$

ce qui entraîne facilement (2) modulo le choix susmentionné de r.

Il est à noter que le sujet de Maths I de la filière MP fait établir l'équivalent (1), en admettant le développement (6). La démonstration, inspirée d'un travail de Baez-Duarte (1997), fait intervenir les probabilités. Plus précisément, l'estimation asymptotique de l'intégrale est déduite d'un théorème limite central local.

1.4.2 Commentaires généraux

Ce sujet nécessitait une solide maîtrise du programme d'analyse, qu'il couvrait assez largement : inégalités élémentaires, séries, séries entières, séries de fonctions (utilisation de la convergence uniforme), intégration (intégrales généralisées, convergence dominée, permutation série intégrale, continuité d'intégrale à paramètre). Il permettait ainsi de vérifier la connaissance de plusieurs théorèmes importants du cours, ainsi que la capacité à mener assez rapidement des calculs non triviaux. Le caractère fermé de la plupart des questions a conduit à un barème valorisant fortement les justifications précises. Hormis l'analyse, seule la combinatoire était sollicitée (question 17).

Le problème était très long, de niveau soutenu, mais abordable. Les questions nécessitaient principalement une bonne connaissance du cours, assortie à une certaine rigueur dans son application et/ou la capacité de mener à bien des calculs simples. L'étalonnement des copies est très satisfaisant. Beaucoup de candidats ont pu démontrer des qualités mathématiques ; les meilleurs ont traité une part très significative de l'épreuve.

À l'inverse, un lot important de copies reflète une méconnaissance du cours (ou tout au moins un manque de recul) et mettent en évidence de grosses lacunes techniques. Rappelons que les théorèmes mettant en jeu une permutation non triviale de symboles (continuité d'une intégrale à paramètre, passage à la limite dans une intégrale, permutation somme-intégrale) nécessitent des hypothèses précises, qu'il faut absolument expliciter et vérifier. Soulignons aussi que l'obtention d'une bonne technique de calcul est un des objectifs essentiels des deux années de préparation.

1.4.3 Analyse détaillée des questions

Q1 - Correctement traitée dans beaucoup de copies. Plusieurs méthodes étaient possibles (entre autres : lemme d'Abel, règle de d'Alembert). Cependant, pas mal de candidats utilisent, dans cette question et les suivantes, un logarithme complexe non identifié.

Q2 - Beaucoup de candidats n'ont pas compris ce qu'ils devaient démontrer. Souvent, la dérivation formelle est faite, mais les justifications manquent de soin. Les bonnes solutions reposent soit sur une utilisation soigneuse des séries entières (gestion de l'intervalle), soit sur l'application du théorème de régularité C^1 des séries de fonctions. Enfin, le résultat n'est pas toujours simplifié.

Q3 - Globalement bien traitée. Cependant, certains candidats utilisent le fameux « logarithme complexe », qui « trivialise » ; cette question et la précédente !

Q4 - Les deux items reposent sur des arguments un peu différents, ce qui explique sans doute que, si chacun a été traité par un nombre significatif de candidats, rares sont les copies qui résolvent la question dans son intégralité. Pour le premier item, les erreurs proviennent d'une manipulation sans soin des inégalités. Dans le second, une inégalité fausse ou non pertinente est souvent substituée à un argument asymptotique.

Q5 - Trois sous-questions simples, qui ne sont que rarement traitées par les mêmes candidats. La première repose sur le fait que exp ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$; le fait qu'elle soit strictement positive sur $\mathbb{R}$ ne saurait suffire. Pour la seconde, un argument de continuité est nécessaire. Pour la troisième, il faut préciser que chaque $1 - e^{-nt}$ est strictement positif.

Q6 - Encore trois sous-questions simples. La première fait apparaître, dans certaines copies, une mauvaise compréhension de la notion de fonction continue par morceaux. La deuxième est en général bien traitée, la troisième l'est rarement (le cas des entiers est à distinguer). Un dessin convaincant pouvait tenir lieu de solution pour l'ensemble de la question.

Q7 - Question traitée de manière très inégale, rarement de façon précise et efficace. On attend la mention de la continuité sur $[1, +\infty[$ (sans inventer un faux problème en 1) et une estimation justifiée en $+\infty$. On remarque beaucoup de résultats asymptotiques fantaisistes (équivalents) ou non justifiés. Enfin, les indispensables valeurs absolues sont absentes de la plupart des copies.

Q8 - La seconde égalité a souvent été établie. C'est moins vrai de la première, qui a reçu un certain nombre de solutions prétendant éviter le découpage de l'intégrale et relevant du pur bluff.

Q9 - La première partie était immédiate par encadrement ; beaucoup de candidats se sont embarqués dans des calculs explicites, très rarement concluants. Le lien avec la formule de Stirling a eu plus de succès ; la manipulation des équivalents manque toutefois parfois de rigueur.

Q10 - L'expression pertinente de $\ln(1 - e^{-t})$ comme somme de série est donnée dans beaucoup de copies. Il en est de même du calcul formel. Ceux qui ont produit une justification complète ont été récompensés par le barème. L'argument le plus simple reposait sur le théorème de sommation L^1 ; quelques candidats ont préféré appliquer le théorème de convergence dominée.

Q11 - Question difficile, qui n'a que rarement reçu de réponses complètes. Les solutions partielles (preuve de la décroissance, lien avec le théorème de convergence dominée) ont été récompensées.

Q12 - Application de la continuité d'une intégrale à paramètre, très inégalement traitée, avec nécessité de préciser les choses en 0. Beaucoup de candidats ne semblent pas vraiment comprendre l'importance et la nature de l'hypothèse de domination.

Q13 - Cette question demandait un certain recul. Les réponses partielles (lien avec le théorème spécial des séries alternées) ont été bien payées. Les candidats ayant repéré la petite erreur d'énoncé sur le signe ont reçu un bonus.

Q14 - Le lien avec la question précédente via la convergence uniforme n'a été perçu que par une poignée de candidats.

Q15 - Rarement traitée.

Q16 - Question reposant sur la synthèse de plusieurs résultats précédents, mais demandant un peu de travail supplémentaire. Les réponses sont le plus souvent partielles ; à nouveau, beaucoup de tentatives de bluff.

Q17 - Seule question du problème ne faisant pas intervenir l'analyse, souvent abordée. Les réponses ont été très inégales, allant du parfait au dépourvu de sens (nombreuses erreurs de typage). Les deux premiers items ont eu plus de succès que les deux derniers.

Q18 - La première partie, très simple, a donné principalement lieu à des réponses aberrantes (expression des $a_{n,N}$ faisant intervenir z). Quelques candidats ont vu le produit de Cauchy dans la seconde partie.

Q19 - Rarement bien traitée. Le rayon 1 est donné par la plupart de ceux qui abordent cette question, mais avec des justifications le plus souvent insuffisantes.

Les questions suivantes n'ont reçu que peu de réponses significatives.

1.5 Mathématiques 2 - filière PC

1.5.1 Généralités et présentation du sujet

Le sujet propose d'aborder un théorème de Kreiss de 1962 et plus précisément de donner une démonstration de l'inégalité de Spijker publiée en 1992 et améliorant le résultat de Kreiss. L'inégalité en question est une borne sur la norme de la résolvante d'une matrice complexe $M \in M_n(\mathbb{C})$ satisfaisant une condition de stabilité : on demande $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|M^k\| < +\infty$.

Le sujet comporte 20 questions dont l'ultime question présente l'inégalité sous forme de coefficients matriciels de la matrice M^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

La norme matricielle choisie dans l'énoncé, notée $\|\cdot\|_{op}$, est la norme subordonnée à la norme $\|\cdot\|_2$ sur $M_{n,1}(\mathbb{C})$ notée quant à elle $\|\cdot\|$. Il sera donc question pour le candidat de spéciale PC-PC* à la fois de s'adapter et de montrer ses acquis sur des questions d'analyse matricielle.