COMPOSITION DE MATHS A, FILIERE MP (XLSR)

1. Commentaires généraux

Le sujet de cette année avait pour finalité l'étude de quelques propriétés topologiques des familles de sous-espaces vectoriels orientés de dimension fixés, c'est-à-dire des grassmaniennes orientées. Plus précisément, la dernière partie étudiait la compacité et la connexité par arcs des grassmaniennes orientées. Questions abordées via le revêtement universel du plongement de Plücker de celles-ci dans la sphère unité de l'espace vectoriel des formes alternées munies d'un produit scalaire adé-quat étudié dans les parties précédentes. Bien entendu, ce sujet, à vocation donc essentiellement géométrique, ne nécessitait aucune familiarité avec les notions précédentes ni n'en introduisait la terminologie, et, au contraire, utilisait des notions élémentaires du programme autour de l'algèbre linéaire, multilinéaire et espaces euclidiens, ainsi que de la topologie. En particulier, on commençait dans une première partie par quelques préliminaires de géométrie euclidienne, notamment sur les valeurs des déterminants des matrices de Gram. Ensuite, la seconde partie se concentrait sur l'étude de certaines propriétés des matrices de Gram, en relation avec les applications multilinéaires alternées. Dans la troisième partie, on étudiait la structure euclidienne de ces dernières. En dernière partie, l'ensemble du matériel ainsi accumulé permettait la construction d'une application explicite, qui était précisément le revêtement du plongement de Plücker, et la démonstration des propriétés topologiques annoncées de (l'image de) la grassmannienne des sous-espaces vectoriels orientés d'un espace euclidien.

Les questions du sujet étaient dans l'ensemble bien posées et toutes les constructions et définitions rappelées. Il s'agissait néanmoins d'un sujet relativement difficile de par la lourdeur des notations à intégrer au fil de l'épreuve, ainsi que par la nature même des objets étudiés (espace d'espaces, ou application à valeur dans des applications), qui ont pu dérouter un certain nombre de candidats. Cependant un certain nombre de questions étaient plus classiques et ont été plutôt bien traitées. Les réponses attendues, sans être évidentes, ne nécessitaient en général pas de rédactions complexes de plusieurs pages ni des vérifications fastidieuses mais elles nécessitaient de bien intégrer les notations proposées par l'énoncé et les hypothèses faites. Par exemple, parmi les erreurs basiques qui sont revenues, certaines copies ont confondu le nombre p de vecteurs d'une famille d'un espace vectoriel E avec la dimension de cet espace ou bien d'autres ont remplacé l'espace euclidien abstrait
E par $\mathbb{R}^n$. Enfin, on notera que l'énoncé donnait une définition de forme linéaire alternée mais que certaines copies ont utilisé d'autres caractérisations sans prendre la peine de justifier leur équivalence.

Sur la correction de 2272 copies, nous avons obtenu une moyenne de 8,06/20 et un écart type de 3,70 pour les candidats français et 6,59/20 de moyenne et 3,70 d'écart type pour les candidats internationaux. Un peu plus d'une centaine de copies ont obtenu une note au-dessus de 14/20, dont 12 copies un 20/20, ce qui est un peu plus faible que les années précédentes. Les deux premières parties du sujet ont été largement traitées, ainsi que les premières questions de la troisième. La quatrième partie n'a que peu été touchée dans l'ensemble. Elle nécessitait d'avoir bien assimilé les résultats et notations des premières parties.

Rappelons comme chaque année quelques recommandations importantes. Nous insistons sur l'importance d'une rédaction rigoureuse et soignée, ainsi que sur une mise en valeur claire de la structure de la copie (numérotation des questions et présentation adéquate des résultats). De plus, un soin minimal et une écriture lisible sont attendus et l'utilisation des questions précédentes nécessite de les mentionner explicitement et précisément pour être valorisée. Enfin, si la pondération des questions est généralement proportionnelle à leur difficulté, il est absolument nécessaire de prendre le temps de fournir une rédaction correcte des réponses données, y compris pour les résultats élémentaires. La stratégie de survoler le sujet en ne répondant qu'aux questions les plus simples ne peut aboutir à une note correcte.

2. Examen détaillé des questions

Partie I.

1a. Question abordée dans toutes les copies. La majorité des copies ont invoqué la compacité des sphères unités et la continuité du produit scalaire à bon escient. Certaines copies se sont malheureusement contentées de justifier l'existence d'une borne supérieure sans justifier qu'elle était atteinte.

1b. Question abordée dans la majorité des copies mais à la rédaction parfois trop rapide ou bâclée. Il suffisait essentiellement de reprendre la question précédente mais il fallait faire attention à préciser sur quels sous-espaces vectoriels on le faisait.

2. Il s'agit de la première question où bon nombre de candidat n'ont soit pas fourni de réponse soit présenté une rédaction manquant de soin et justification. Il convenait de comprendre qu'il fallait montrer que l'égalité demandée était vraie pour toute famille obtenue dans les questions précédentes, ce qui pouvait se faire par récurrence, l'utilisation de la condition d'égalité dans Cauchy-Schwarz et un argument pour justifier que le maximum valait bien 1.

3a. Cette question était beaucoup plus facile, le caractère orthonormé de la famille étant assuré par les questions précédentes ; il suffisait de justifier que le cardinal de la famille était bien celui de la dimension de V.

3b. Question difficile traitée correctement dans peu de copies. Elle nécessitait d'avoir bien compris la définition et propriétés (notamment le caractère maximal) des familles u_k et u'_k pour conclure, par exemple par un argument d'annulation de la dérivée en un extremum. Beaucoup de copies ont cherché à calculer une dérivée, sans avoir réfléchi à l'utilisation qui pourrait en être faite.

3c. Question souvent bien traitée à partir du résultat de la précédente.

3d. Question souvent traitée, mais parfois avec une rédaction insuffisante. Essentiellement, il fallait utiliser les résultats des questions précédentes et la symétrie des rôles de u_k et u'_k.

4a. Question souvent traitée. Il fallait soigneusement justifier que les produits scalaires étaient positifs, en utilisant à bon escient la définition des familles u_k, u'_k. Une erreur classique a été d'oublier que la propriété les caractérisant était définie sur des familles de vecteurs de norme 1.

4b. Question facile souvent bien traitée.

4c. Question assez souvent bien traitée qui ne présentait pas de difficulté particulière si on se rappelait des questions précédentes ou de la condition d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Partie 2.

5a. Question traitée par quasiment toutes les copies mais pas toujours soigneusement rédigée. Si on n'utilisait pas l'interprétation en terme de déterminant, il fallait utiliser les définitions précises de multilinéarité et d'alterné données dans l'énoncé. En particulier, si on utilisait une caractérisation différente d'être alterné, il fallait la justifier un minimum et nous avons constaté des erreurs récurrentes malheureuses dans l'écriture de l'action d'une permutation sur les coefficients de la matrice de Gram ou sur les manipulations des coefficients dans les sommes.

5b. Question souvent bien traitée. Il fallait cependant faire apparaître clairement où la linéarité de f intervenait dans la réponse.

6a. On pouvait soit refaire un raisonnement similaire aux questions précédentes, soit utiliser la précédente à condition d'écrire précisément quelles applications f et g on utilisait.

6b. Question souvent traitée. La symétrie du produit scalaire était un des arguments mais n'était en rien suffisant. Il fallait utiliser que le déterminant d'une matrice est égal à celui de sa transposée, ou bien un raisonnement équivalent sur la formule du produit mixte.

6c. Question dont la difficulté reposait sur le fait que l'on regardait une application à valeurs dans l'espace des formes multilinéaires alternées, dont on voulait montrer qu'elle était elle-même alternée et multilinéaire. Ce qui pouvait se vérifier, une fois le problème clairement posé, en utilisant les deux questions précédentes.

7a. Question qui nécessitait de faire attention à l'énoncé pour éviter de se tromper. La matrice était à coefficient réels, mais l'espace vectoriel E quelconque et la matrice pas nécessairement inversible ce qui rendait les arguments de matrice de passage délicats, et possiblement faux. On pouvait répondre en utilisant le caractère alterné du produit mixte.

7b. Question qui a été traitée dans une bonne moitié des copies mais pas toujours parfaitement. Il fallait notamment faire attention que p n'était pas nécessairement égal à n. On pouvait répondre à cette question en considérant une base orthonormée b associée au sous-espace engendré par la famille $(e_1, \ldots, e_p)$ et en considérant la question 7a pour réécrire $\Omega_p(e)$ en fonction de $\Omega_p(b)$ en remarquant que cette dernière était non-nulle par un calcul direct.

7c. Question régulièrement bien traitée.

8a. Question très facile qui n'était pas sans rappeler la question 4.b.

8b. Question plus difficile et peu souvent bien rédigée. On pouvait la résoudre en écrivant soigneusement la décomposition du projeté orthogonal de e_1 comme la somme de e_1 avec un élément w du sous-espace engendré par les $(e_2, \ldots, e_n)$, puis en utilisant la linéarité du produit mixte par rapport à sa première colonne et que le caractère alterné impliquait que si une colonne était combinaison linéaire des autres, ce produit mixte était nul.

8c. Question qui pouvait se résoudre par une récurrence et nécessitait de préciser soigneusement les cas d'égalité.

9a. Question traitée dans un nombre significatif de copies, et souvent bien. Cette question pouvait se faire d'une manière analogue à la question 7c.

9b. Question peu traitée et dont la rédaction a de plus été fréquemment insuffisante dans les copies l'ayant considérée. On pouvait distinguer le cas d'une famille non-libre en utilisant 7b. Le cas général s'obtenait en considérant des bases orthonormales b, b' des sous-espaces engendrés par les familles e et e', un argument similaire à 7a et la fin de la partie 1 (ou un argument similaire) pour majorer $|\Omega_p(b)(b')|$.

Partie 3.

10a. Question peu traitée. Elle nécessitait, à partir de la formule définissant $\omega(u)$, une justification combinatoire précise utilisant le caractère alterné pour vérifier que l'ensemble d'indexation était bien $\mathcal{I}_p$.

10b. Question souvent traitée sans difficulté majeure autre qu'avoir assimilé les notations et définitions introduites par l'énoncé ainsi que la question précédente. Le point le plus subtil était sans doute de remarquer que si $\alpha \neq \beta$, l'une au moins des colonnes de la matrice $\mathrm{Gram}(e_\alpha, e_\beta)$ était nulle ce qui entrainait l'annulation du déterminant et le caractère orthogonal de la famille. Le cardinal de $\mathcal{I}_p$ n'a pas toujours été calculé correctement.

10c. Question très peu traitée. Il fallait remarquer que pour $p = d - 1$, un élément de $\mathcal{I}_p$ était déterminé par un élément de $\{1, \ldots, d\}$, en l'occurrence le seul indice manquant dans $\alpha \in \mathcal{I}_p$. Ceci permettait de construire une bijection entre la famille orthogonale, par la question précédente, des $\Omega(e_\alpha)$ et celle des e_α dont on pouvait démontrer soit par un calcul, soit par un résultat de cours, qu'elle définissait une isométrie.

11. Question qui découlait des calculs explicites à partir des formules données et obtenues dans les parties précédentes, mais trop souvent mal rédigée, notamment sans donner de détails sur les calculs faits ni référence aux questions précédentes justifiant ces calculs.

12. Question traitée majoritairement dans les meilleures copies. La difficulté principale résidait dans une bonne compréhension du produit sacalaire introduit. Une des idées de démonstration possible consistait par exemple à réécrire le produit scalaire $\langle \Omega_p(u), \Omega_p(v) \rangle$ en termes de $\Omega(u)(v)$ et de justifier que ce dernier terme ne dépendait que du produit scalaire choisi sur E.

Partie 4.

13a. Question très peu traitée dans son intégralité, essentiellement dans les meilleurs copies. L'une des implications était une conséquence facile de la question 7a. L'autre implication était bien plus délicate, notamment car elle nécessitait d'utiliser des résultats des différentes parties du sujet qu'il fallait avoir assimilé.

13b. Question peu traitée. L'unicité était une conséquence du fait que, pour une base orthonormale e du sous-espace V, on avait $\mathrm{vol}_p(e) = 1$. Pour établir l'existence, il suffisait de remarquer que, pour une telle famille e dans C, $\Omega_p(e)$ convenait.

14a. Question très rarement traitée. La condition sur la norme découlait des calculs de $\det(Gram(e, e))$ pour une famille orthonormale. L'injectivité était une conséquence de 13a et d'un argument de signe garantissant que les orientations coïncidaient.

14b. Question difficile très rarement traitée. On pouvait la résoudre par un critère séquentiel, en choisissant des bases orthonormales $e^{(n)}$ d'une suite $(V^{(n)}, C^{(n)})$ puis en faisant une extraction diagonale des vecteurs $e_i^{(n)}$ en utilisant la compacité de la sphère unité de E. On pouvait également démontrer le caractère fermé et borné, ce dernier point étant donné par la question précédente.

15. Question très peu traitée et difficile. Le fait que $p = d$ implique la non-connexité par arcs était la partie la plus accessible de la preuve.