épreuve de mathématiques

Rapport

L'opérateur de dérivation D sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ s'itère naturellement pour définir des opérateurs D^n. L'intégration peut aussi se voir comme une dérivée d'ordre -1 et on dispose donc ainsi d'une définition de D^n pour tout $n \in \mathbf{Z}$, avec des relations de composition bien compris.

Le sujet traite alors de la question de savoir définir un opérateur de dérivation fractionnaire, i.e. un D^α pour $\alpha \in \mathbf{R}$ quelconque interpolant les D^n pour $n \in \mathbf{Z}$ et avec des relations de composition raisonnables.

L'intérêt d'une telle problématique n'est pas seulement théorique mais trouve des applications en mécanique des fluides où la dérivée d'ordre $1/2$ apparait naturellement ou en viscoélasticité des gommes. Riemann, Liouville et Caputo ont proposé des approches de ce problème en partant de l'idée d'exprimer D^{-n} comme un opérateur avec un noyau. L'approche moderne utilise la transformation de Laplace.

Le problème se découpe alors en quatre parties.

- La première, peut être plus fine mais certainement plus classique que les suivantes, établit les outils de base nécessaires : une formule de Fubini sur un triangle, le produit de convolution et la transformation de Laplace.

- Dans la deuxième, on définit l'intégration fractionnaire à l'aide d'un opérateur à noyau,

- puis on définit la dérivation fractionnaire tout d'abord selon Riemann-Liouville, puis Caputo et on étudie les lois de composition.

- Enfin dans une dernière partie, on étudie deux équations différentielles fractionnaires simples.

Préliminaires

(1) Le problème commence par étudier les premières propriétés de la fonction Γ. Sa définition en a) puis son équation fonctionnelle en b). Malgré leur caractère élémentaire et classique, le jury a noté des imprécisions dans de trop nombreuses copies (l'intégrande n'est pas prolongeable en 0 par continuité et il converge certes vers 0 en l'infini mais cela ne suffit pas à conclure à la convergence).

(2) On propose de démontrer un cas simple du théorème de Fubini sur un triangle.

(a) Pour l'essentiel il s'agissait de bien justifier les arguments de convergence. Rares ont été les candidats qui ont vu l'intérêt de (ii), quand le paramètre était à la fois dans l'intégrande et dans les bornes de l'intégrale.

(b) La dérivation sous le signe intégrale a trop rarement été bien justifiée, en revanche la règle de la chaine a connu plus de succès et a permis aux candidats l'ayant bien appliquée de réussir (c).

(3) La justification de 3-a) était similaire à celle de 2-a) mais à nouveau peu de candidats se sont aperçus que le paramètre x apparaissait aux bornes de l'intégrale. Les questions b) et c) ont été plutôt bien réussies.

(4) Le sujet étudie à présent la transformation de Laplace pour les fonctions continues d'ordre exponentiel ce qui permet de justifier aisément l'existence en a) et de faire l'intégration par parties en b). La question c) a posé plus de problèmes comme souvent quand il s'agit de majorer efficacement : les candidats se sont alors souvent perdus dans des sous-cas multiples et complètement inutiles sans se rendre compte qu'il ne s'agissait pas d'optimiser une majoration mais seulement de montrer une convergence simple.

(5) On montre l'injectivité de la transformation de Laplace en utilisant le théorème d'approximation de Weierstrass. La linéarité de $\mathcal{L}$ a été plutôt bien vue, ce qui n'a pas été souvent le cas des majorations en b) et encore moins c) sauf dans de rares copies qui se sont révélées excellentes au bout du compte.

A- Intégration fractionnaire

(6) On commence par introduire un opérateur à noyau, par récurrence par exemple.

(7) La formule $D(\Phi_\alpha) = \Phi_{\alpha-1}$, avec les conventions sur Γ, a rarement été donnée en a). Le calcul à mener dans b) a été bien réussi, mais la question c), ouverte, a conduit à de très nombreuses erreurs.

(8) On utilise l'écriture de l'opérateur à noyau de 6) en remplaçant le paramètre entier n par $\alpha > 0$ réel quelconque et on vérifie qu'il vérifie des propriétés raisonnables. Il interpole I^n, il se compose convenablement en a), son comportement relativement à la transformée de Laplace en b), son effet sur Φ_α en c) et qu'une primitive fractionnaire d'une fonction non nulle n'est pas la fonction nulle en e). Ces questions relativement faciles ont été plutôt bien réussies.

B- Dérivées fractionnaires

(9) La première formule était celle de Taylor reste intégrale qui a été souvent reconnue et sinon redémontrée par récurrence.

(10) On définit la dérivation fractionnaire au sens de Rieman-Liouville. On commence par montrer que c'est un inverse à gauche de l'intégration en a). On demande ensuite en b) de constater que D^α appliqué à une fonction constante n'est pas nulle sauf dans le cas classique où $\alpha \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Cette question, ouverte, a été très mal traitée. On étudie en c) son effet sur les Φ_α, question facile et bien faite, contrairement à d) qui n'a presque jamais été abordée.

(11) Il s'agissait ensuite de constater que l'opérateur de dérivation fractionnaire se composait mal : les calculs étaient simples puisque les effets de D^α et J^α étaient déjà bien identifiés sur les Φ_γ. Pour autant les bonnes réponses ont été très rares.

(12) On introduit la dérivation selon Caputo dont on étudie les liens avec celle de Riemann-Liouville. La question a été très peu abordée : les candidats sont plutôt partis vers les questions plus faciles de la partie C.

C- Deux équations différentielles fractionnaires

Une proportion relativement important des candidats ont su repérer des points à gagner dans les questions 13) et 14). Les dernières questions n'ont pas été abordées ce qui était relativement prévisible vue la longueur du sujet.

(13) On part de l'équation d'Abel écrite sous forme intégrale qu'on demande en a) d'exprimer sous forme différentielle en utilisant que D^α est un

inverse à gauche de J^α, où sous forme d'une égalité des transformées de Laplace en b). Ceux qui se sont penchés sur cette question, l'ont bien réussie.

(14) Des questions élémentaires sur des séries entières classiques en a) qui ont souvent été repérées. La règle de d'Alembert en b) a été bien vue mais rarement bien appliquée. En c) il s'agissait pour l'essentiel d'intervertir somme et intégrale dans le disque de convergence. En d) il suffisait d'appliquer l'opérateur $\mathcal{L}$ à l'égalité $J^\alpha e_\alpha = \Phi_\alpha * e_\alpha$.

(15) On étudie l'équation différentielle fractionnaire linéaire d'ordre 1 la plus simple $D^\alpha u = -u$. Pour répondre à cette question il suffisait de rappeler l'égalité $J^\alpha \circ D_*^\alpha = J^m D^m$ et utiliser 9).

(16) Le calcul de $\mathcal{L}(\Phi_k)$, avec la linéarité de $\mathcal{L}$ et 7-c) permettait de conclure.

Plus généralement le jury note des difficultés dans les majorations et notamment lors des manipulations des inégalités qu'on multiplie sans s'inquiéter des signes. Pour l'essentiel le cours est connu mais trop souvent appliqué de manière trop approximative, notamment lors de l'utilisation du théorème de convergence dominée.