Q6 - La question est élémentaire. Dans un tiers des copies, la fonction est intégrée avec du logarithme ; le logarithme principal n'est pas au programme et de tels arguments ont été sanctionnés.

Q7 - Cette question simple, puisque ne portant que sur l'inégalité triangulaire et son cas d'égalité, n'a été complètement traitée que par une très faible proportion de candidats. Une partie substantielle des candidats considère des inégalités entre complexes.

Q8 - La question est bien traitée dans la moitié des copies, ce qui est satisfaisant. On attend ici une référence explicite au théorème de convergence dominée, avec domination par une fonction indépendante de n.

Q9 - Il suffit d'utiliser **Q6** et **Q8**, et de connaître bien sûr la formule de Taylor avec reste intégral.

Q10 - Pour le premier point, on attend une continuité par composition. Pour le second, on peut le montrer par une étude élémentaire ou un argument de borne atteinte sur un fermé borné en dimension finie. Cette question difficile n'est traitée que par une poignée de candidats.

Q11 - Il faut ici établir le caractère C^1 d'une intégrale à paramètre. La plupart des candidats ont énoncé le théorème. L'expression de la dérivée partielle et la domination sur les segments ne sont pas toujours justes.

Q12 - Il reste à intégrer l'expression trouvée plus tôt, puis à déterminer une primitive de la fonction donnée. Les indications permettent aux candidats de traiter au moins partiellement la question.

Q13 - Cette question de synthèse demande du recul et n'est abordée que par un petit tiers des candidats.

Q14 - Question élémentaire de probabilité souvent traitée.

Q15 - . On applique ici la continuité de la somme d'une série de fonctions sous l'hypothèse de convergence uniforme. Les candidats ayant abordé ce point l'ont souvent correctement fait.

Q16 - La question est délicate et les arguments sont rarement donnés.

Q17 et 18 - Questions de synthèse, rarement abordées de façon satisfaisante.

Q19 - Question bien traitée dans un quart des copies.

Q20 - Question nettement plus délicate, rarement abordée.

Q21 - Question classique d'analyse de première année, correctement traitée par ceux qui l'ont abordée.

Q22 - Pas abordée.

1.7 Mathématiques 2 - filière PSI

1.7.1 Généralités et présentation du sujet

Le sujet portait sur l'analyse spectrale des opérateurs intégraux à noyau de type positif, qui sont une version continue des endomorphismes symétriques positifs d'un espace euclidien.
Les principaux thèmes abordés par le sujet étaient les suivants :

- les espaces euclidiens, et plus généralement les espaces préhilbertiens réels (questions 3, 7, 8, 9, 12, 14, 19 et 20) ;
- les intégrales à paramètre (questions 4 et 5) ;
- la topologie (question 3) ;
- les équations différentielles (questions 16 et 17).

Le sujet était assez long. Le jury a systématiquement tenu à valoriser le bon sens des candidats (par exemple, en acceptant des définitions légèrement inexactes de la notion de fonction de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux ; bien entendu, on n'a pas particulièrement valorisé les candidats croyant qu'il s'agissait simplement des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$). Le jury valorise l'honnêteté intellectuelle des candidats : par exemple, à la question 10, un candidat indiquant d'emblée qu'il se limitera à des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ est mieux considéré que celui qui fait comme si l'hypothèse était « $\mathcal{C}^1$ tout court ».
La plupart des candidats abordent l'essentiel des questions jusqu'à la 16, quelques candidats abordent avec succès la 17 ; en revanche, les autres questions ne sont traitées que très superficiellement, avec un taux de réussite extrêmement faible. Il n'est pas inutile de rappeler que les tentatives de grappillage sont le plus souvent contreproductives, les sujets étant plutôt progressifs même si des questions difficiles peuvent intervenir tôt dans le sujet (ici, la question 6).
Seules trois questions présentent des taux de réussite satisfaisants : la question 1, la question 2 et la question 10 (où, toutefois, les candidats considèrent presque toujours que les fonctions sont en réalité de classe $\mathcal{C}^1$).
Le jury constate avec soulagement que l'utilisation à mauvais escient des symboles d'implication et d'équivalence a tendance à disparaître des copies. Cependant, un net relâchement est observé sur la question de l'introduction des objets manipulés : des objets mathématiques et autres variables apparaissent par magie sans jamais avoir été introduits dans le raisonnement, ce qui conduit le plus souvent à une grande confusion.
On observe aussi le défaut récurrent d'un manque de justification des résultats annoncés. Par exemple, à la question 3 beaucoup de candidats affirment que $t \mapsto f(t,u)$ est continue pour tout u dans $[c,d]$, mais sans rattacher clairement cette affirmation à la continuité de f ni parler de composition de fonctions continues. Dans le même genre, chez les rares candidats qui affirment que $[a,b][c,d]$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$, presque aucun ne s'estime obligé de justifier son affirmation ; pourtant aucun résultat de construction de partie fermée (ou bornée) ne figure au programme. On signale au passage que le vocabulaire « compact » ne figure pas au programme (les candidats qui l'ont utilisé à bon escient n'ont cependant pas été sanctionnés).

1.7.2 Analyse détaillée des questions

Q1 - Cette question facile a donné pourtant lieu à des erreurs surprenantes. On voit parfois une incompréhension du format des différentes matrices en jeu (certaines écrivent que AX est carrée de taille n, idem pour $X^T AX$). Trop nombreux sont ceux qui confondent une matrice avec un coefficient. On a dû pénaliser les candidats qui mélangeaient les indices sans aucune explication (le résultat étant donné, une démonstration très propre était exigée).

Q2 - Vu la formulation de la question, on attendait une mention du théorème spectral pour voir que toutes les valeurs propres (a priori complexes) de A étaient en fait réelles. Le cœur de l'argumentation est trop souvent vague : la positivité stricte de $X^T X$ pour un vecteur non nul X est trop rarement citée, certains candidats parlent même *du* vecteur propre associé à la valeur propre λ.

Q3 - Un des problèmes rencontrés par les candidats a été le nombre élevé de variables. Il fallait d'emblée fixer x et se placer $[a,x][c,d]$. Trop de candidats dominent ... par une fonction de t, qui était ici le paramètre ! L'habitude d'utiliser x comme paramètre et t comme variable d'intégration semble avoir pris le pas sur une analyse rigoureuse des termes du problème, et on aimerait qu'après deux ans de classes préparatoires les candidats ne soient plus impressionnés par ce genre de difficulté formelle.

On attendait ici une justification claire (composition de fonctions continues) du fait que les fonctions partielles de f sont toutes deux continues. Trop souvent, les affirmations ne sont pas quantifiées (on lit $t \mapsto f(t,u)$ est continue, mais qu'est u ?). Peu de candidats comprennent qu'il faut majorer $|f|$ par une constante, en s'appuyant sur le théorème des bornes atteintes. Le jury a tout de même valorisé les copies où la dominante est $u \mapsto \max_{t\in[a,x]} |f(t,u)|$, à condition que l'existence de cette fonction soit justifiée et que sa continuité (par morceaux) soit citée même si elle n'est pas démontrée (les élèves de PSI ne disposent pas des outils théoriques permettant de démontrer facilement cette continuité). Des points de bonus étaient prévus pour ceux qui justifiaient très proprement le caractère fermé et borné de $[a,b][c,d]$. Pour le caractère borné de f, l'argument "continue sur un produit de segments" n'a pas été accepté, car il s'apparentait à du bluff.

Q4 - Mêmes remarques qu'à la question précédente. Étrangement, cette question a régulièrement été mieux réussie que la précédente. Certains candidats ont tout de même des idées mal maîtrisées : ils parlent de primitive de f (qui est une fonction de deux variables), utilisent une étrange notation $\varphi'(x,t)$ (ce qui ne saurait avoir de sens puisque φ est une fonction de deux variables). Pour dériver $x \mapsto \int_a^x f(u,t)\,\mathrm{d}u$, il est incongru d'introduire une primitive arbitraire de $u \mapsto f(u,t)$, alors que le cours donne directement la dérivabilité ainsi que la dérivée, une fois rappelée la continuité de $f(-,t)$! Enfin, beaucoup de candidats oublient de préciser que $\varphi(x,-)$ est bien intégrable sur $[c,d]$ (en le justifiant).

Q5 - Une proportion satisfaisante de candidats identifient une application de la question précédente, mais une très grande proportion d'entre eux ne s'intéresse absolument pas à la valeur de ψ en a, écrivant $\psi(x) = \int_a^x \psi'(t)\,\mathrm{d}t$ sans plus d'explication ! C'est une erreur grave.

Q6 - Cette question difficile n'a pratiquement pas été réussie. On ne pouvait pas s'appuyer directement sur le théorème au programme sur les sommes de Riemann car il ne donne aucune façon de contrôler l'uniformité de la convergence par rapport à l'intégrande choisi. Pour majorer $|f(u,t) - f(u_k,t_l)|$ avec u dans $[u_k, u_{k+1}]$ et t dans $[t_l, t_{l+1}]$, il était bien vu, après avoir utilisé le caractère lipschitzien, de majorer immédiatement $|u-u_k| + |t-t_l|$ par $2\frac{b-a}{n}$ avant d'intégrer.

Q7 - La symétrie n'a posé aucun problème. Le caractère positif a été très peu réussi ; beaucoup de candidats s'empêtrent dans des conflits de notation. Si l'on fixe des vecteurs $x_1,\dots,x_n$ de E puis un vecteur X de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, il ne faut surtout pas noter $x_1,\dots,x_n$ les coefficients de X ! La plupart des candidats sont bloqués car ils ne reconnaissent pas en $\sum_{1\le i,j\le n} a_i a_j (x_i \mid x_j)$ le développement d'un produit scalaire : c'est probablement le signe d'un manque de pratique du calcul symbolique.

Q8 - Cette question est très mal réussie, ce qui est surprenant car il s'agissait d'une application pure et simple de la précédente. Seule une toute petite proportion des candidats repère qu'il n'y a presque rien à faire pour le caractère positif puisque les matrices de covariance du noyau envisagé sont des matrices de covariance d'un noyau étudié à la question précédente ! Pour le reste, on retrouve ici peu ou prou les mêmes problèmes qu'à la **Q7**.

Q9 - Le jury a valorisé les candidats citant précisément le théorème spectral, en donnant une matrice de passage orthogonale ou en mettant la similitude sous la forme d'une congruence (à savoir $A = PDP^T$ ou $A = P^TDP$). Il fallait ici penser à récrire les coefficients de A à l'aide de P et des coefficients diagonaux de D, ce que très peu de candidats sont parvenus à faire (certains interrompent pourtant leur étude alors qu'ils sont très proches de la solution).

Q10 - Limitée aux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ nulles en zéro, cette question aura enregistré un taux de réussite satisfaisant même si l'on déplore l'oubli trop fréquent de la continuité de $(f')^2$ pour passer de $\int_0^1 (f')^2$ à $(f')^2 = 0$. Des bonus étaient prévus pour les candidats assumant clairement le caractère $\mathcal{C}^1$ des fonctions (et indiquant que c'était restrictif par rapport au sujet), ou ceux traitant le sujet avec les hypothèses indiquées et parvenant à passer correctement de la nullité de $\int_0^1 (f')^2$ à celle de f.

Q11 - Beaucoup de candidats ignorent purement et simplement l'indication. Parmi ceux qui la suivent, presque aucun ne prend la peine de démontrer que K_x est continue, et trop nombreux sont ceux qui prétendent que K_x est dérivable en x. Pour les candidats ayant une idée presque correcte de la dérivée de K_x, le calcul du produit scalaire n'a pas présenté de difficulté.

Q12 - Question peu réussie. Beaucoup de candidats prétendent qu'une fonction n'est d'intégrale nulle que si elle est nulle. On n'a jamais valorisé le passage direct de $\forall f \in E,\ \int_I (K_x - K_x')f = 0$ à $K_x - K_x' = 0$

sans explication, on attendait obligatoirement une interprétation en terme de produit scalaire pour valider la réponse. Le passage de $\forall x \in I,\ K_x = K'_x$ à $K = K'$ ne nécessitait nullement la symétrie de K : en invoquant cette dernière sans écrire clairement $\forall (x,t) \in I^2,\ K(x,t) = K_x(t) = K'_x(t) = K'(x,t)$, les candidats jettent un doute sur leur compréhension de la question.

Q13 - La linéarité de u_K est le plus souvent bien faite. Une très grande proportion des candidats ne perçoit pas l'enjeu du caractère “endo" de u_K, autrement dit le fait que $u_K(f)$ soit bien un élément de E pour tout f dans E. On pouvait ici astucieusement s'appuyer sur la question 3, pour peu que l'on démontre proprement la continuité de $(x,t) \mapsto K(x,t)f(t)$. Hélas, c'est rarement fait de façon détaillé (non, cette fonction n'est pas le produit de K par f, en effet f est une fonction de deux variables !).

Q14 - Une bonne partie des candidats sait ce qu'est un endomorphisme symétrique pour un produit scalaire. Une part non négligeable des candidats parvient à comprendre comment utiliser le théorème de Fubini pour les intégrales ainsi que la symétrie de K, mais on ne voit pratiquement jamais de démonstration précise de la continuité de $(x,t) \mapsto K(x,t)f(t)g(x)$. Beaucoup de candidats ont bien retenu leur cours et savent démontrer qu'alors deux vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux : ici, on ne pouvait toutefois pas s'appuyer directement, à moins d'un travail très substantiel, sur les propriétés vues en cours et relatives à la dimension finie (on aurait pu typiquement remarquer que u induit un endomorphisme symétrique de $\mathrm{Vect}(f_\lambda, f_\mu)$ et lui appliquer le théorème spectral, mais aucun candidat n'a usé d'une telle méthode).

Q15 - Peu de candidats pensent à appliquer proprement l'indication (l'utilisation de sommes de Riemann, introduites proprement). La positivité des valeurs propres de u est en général affirmée sans la moindre justification ; lorsqu'une justification est donnée, elle est bien trop souvent incomplète. À nouveau, on ne pouvait pas se contenter d'une simple référence à la **Q2**.

Q16 - Énormément de candidats voient à tort une application du théorème de Cauchy linéaire : il ne s'agissait pas d'une quelconque condition initiale ici puisque les valeurs spécifiées portaient sur deux instants distincts (il s'agit donc d'un problème de conditions aux limites, encore appelé problème de Dirichlet). Le théorème de dérivation sous l'intégrale ne pouvait être employé pour dériver u_K puisque $K : (x,t) \mapsto \min(x,t)$ n'est certainement pas de classe $\mathcal{C}^1$ par rapport à la première variable.

Q17 - Cette question est trop souvent bâclée : peu de candidats étudient le problème de la valeur propre zéro ou éliminent intelligemment le cas des valeurs propres strictement négatives. Presque tous les candidats oublient de traiter la réciproque (une fonction du type qu'ils indiquent est bien un vecteur propre). Cette question aurait dû être traitée avec davantage de soin, car la méconnaissance de la valeur de λ_k empêchait de traiter raisonnablement la suite.

Q18 - Question généralement bien traitée par les quelques candidats ayant trouvé avec succès la valeur de λ_k. Le jury a valorisé les autres candidats qui ne connaissaient pas la valeur de λ_k mais qui calculaient $\int_0^1 \int_0^1 K(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$ avec succès.

Les tentatives de traitement des autres questions se sont presque toujours soldées par un échec, faute d'un recul suffisant sur ces objets abstraits.

1.7.3 Conseils et conclusion

Terminons comme toujours par réitérer quelques conseils importants pour les futurs candidats.

— Maîtriser parfaitement son cours.

— Bien réfléchir, aidé d'un brouillon, à la structure du raisonnement ou du calcul avant de le coucher sur le papier. Au moment de la rédaction, donner toutes les justifications pertinentes (et rien qu'elles !), et structurer correctement ses raisonnements.

— Il est toujours préférable d'analyser un nombre réduit de questions en profondeur plutôt que de traiter superficiellement la totalité du sujet. On pouvait ici avoir une note tout à fait satisfaisante en se contentant à traiter correctement les deux tiers des questions.