Mathématiques 2

Présentation du sujet

Le sujet proposé porte sur les fonctions hypergéométriques. La première partie donne une définition de suite hypergéométrique, elle met essentiellement en œuvre des notions de première année : suites récurrentes, polynômes et espaces vectoriels, familles génératrices, bases. Les deuxième et troisième parties portent sur l'extension de la factorielle à la fonction Γ et les fonctions hypergéométriques. Ici, une large partie du programme d'analyse de seconde année est évaluée : intégration, intégrales à paramètres, séries entières, équations différentielles linéaires. La quatrième partie sur les polynômes de Laguerre porte sur le programme de première année : continuité et dérivation d'une fonction d'une variable réelle, fonctions polynomiales. La dernière partie, sur la loi hypergéométrique, utilise principalement le programme de probabilités de première année et légèrement celui de seconde année : fonction génératrice, idée de l'approximation d'une loi par une autre (comme la loi de Poisson et loi binomiale).

Analyse globale des résultats

Le sujet proposé aux candidats pour cette session se présente sous une forme suffisamment longue avec une difficulté raisonnable. Les meilleurs candidats ont ainsi été en mesure de traiter presque toutes les questions et de les rédiger de manière rigoureuse et claire. Toutes les questions du sujet ont été traitées, au moins en partie, par plusieurs candidats. L'indépendance de plusieurs parties, dont certaines très classiques, et leur progressivité ont permis aux candidats de rentrer en confiance dans le sujet.

Du point de vue du fond, comme le rapport le détaille plus bas, les objets mathématiques que sont les polynômes et les espaces vectoriels ne pas toujours bien compris. Dans beaucoup de copies les résultats classiques sur les séries entières ne sont pas suffisamment connus (régularité sur le disque ouvert de convergence, connaissance de développements usuels...). Enfin, la dernière partie qui porte sur les probabilités a été moins souvent abordée que les autres.

Concernant la forme, une quantité non négligeable de copies ne respecte pas les standards de présentation qui sont attendus pour de futurs ingénieurs : écriture claire, lisible, propos structuré, mise en avant des résultats ; mais aussi des standards relatifs à un concours scientifique : répondre effectivement à la question posée, penser à conclure, citer les résultats ou les questions précédemment utilisés, vérifier les hypothèses de validité. Le jury encourage vivement les candidats à utiliser un brouillon et à ne pas s'engager de manière prématurée dans la rédaction directement au propre d'une réponse nécessitant un certain niveau de réflexion.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

Les parties I, II et III ont été abordées par tous les candidats.

Partie I

Q1 et **Q2**. Les deux polynômes P et Q étaient attendus sous une écriture avec une indéterminée et non uniquement avec leur expression sur $\mathbb{N}$.

Q2. Beaucoup de candidats pensent que $\frac{n+p-1}{n-1}$ est une expression polynomiale en n. Il ne fallait pas oublier de vérifier l'égalité pour les cas où $p > n$.

Q3. La démonstration du fait que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ n'a pas toujours été complète, par absence de la vérification de sa non vacuité et de son inclusion dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Pour ce qui est de la recherche d'une base, beaucoup de candidats ont réussi à expliciter seulement une partie de la famille génératrice de suites (beaucoup de simplifications de l'équation par $n(n-2)$ sans se préoccuper de la valeur de n), mais peu de candidats ont réussi à démontrer l'indépendance linéaire.

Partie II

Cette partie est très classique, elle a été traitée avec succès dans bon nombre de copies.

Q5. Une fraction non négligeable des candidats n'a pas compris ce qu'il y avait à démontrer. Le domaine était donné, il s'agissait de montrer que si $x > 0$, l'intégrale converge. Certains ont perdu du temps à séparer les cas $x \geqslant 1$ et $x \in]0,1[$ pour la convergence de l'intégrale au voisinage de 0. Rappelons aussi que l'application des règles de comparaison suppose que les fonctions soient de signe constant.

Q6. Le théorème de continuité est assez bien connu. En revanche, la domination doit être justifiée et il ne faut pas omettre de mentionner l'intégrabilité de la fonction dominante. La positivité ou croissance de l'intégrale sont trop rarement invoquées. L'hypothèse de continuité permettant de déduire qu'une fonction positive d'intégrale nulle est nulle est presque toujours omise.

Q7 et **Q8**. Assez bien traitées. Pour une intégration par parties sur des intégrales généralisées, il est attendu de préciser la nature des intégrales manipulées.

Partie III

Q9. Bien traitée, parfois des erreurs sur le rang de la première annulation. Une partie infime des candidats pense à utiliser **Q4**.

Q10 et **Q11**. Il manque souvent le cas $n = 0$.

Q11. Les expressions données sont très souvent correctes. En revanche, beaucoup d'erreurs de raisonnement liées à la coïncidence de la fonction Γ et de la factorielle sur $\mathbb{N}$. Il fallait penser à vérifier que $\Gamma \neq 0$ sur D, ce qui demandait de combiner **Q6** et **Q7**.

Q12. Il s'agit de montrer que le dénominateur est non-nul. Beaucoup d'erreurs de raisonnement utilisant la contraposée de **Q9**.

Q14. On retrouve les mêmes problèmes qu'en **Q3**.

Q15. Trop d'applications de la règle de D'Alembert sans se soucier de l'éventuelle nullité du dénominateur, avec trop de raccourcis menant de la valeur de la limite au rayon de convergence. Les cas particuliers sur a et b n'ont été traités que dans de rares copies.

Q16 et **Q17**. Nombreux ont été les candidats qui ont mobilisé les théorèmes de dérivation pour les séries de fonctions, conduisant souvent à des propositions de réponses enchainant des successions d'affirmations supposées vérifier les hypothèses des dits théorèmes.

Q18 et **Q19**. Une bonne part des candidats obtiennent des développements en série entière corrects. En revanche, beaucoup ne reconnaissent pas arctan ou confondent avec sin. Beaucoup d'erreurs sur le développement de $x \mapsto \ln(1+x)$. Il était attendu de présenter des calculs détaillés.

Q20 et **Q21**. Assez peu abordées. Les conditions d'application des questions précédentes ont peu été vérifiées. Pour la question **Q20**, la plupart des candidats pensent justifier l'existence de $F_{a,-N,c}(1)$ et la formule donnant l'expression avec Γ en affirmant uniquement que le quotient de droite est bien défini (alors qu'il était très explicite dans l'en-tête de la question que l'existence de toutes les quantités était nécessaire à l'application de la formule). La convergence de la somme (finie) se trouve souvent justifiée après dans leur rédaction.

Les calculs menés permettant d'arriver au résultat donné dans l'énoncé ont souvent été l'occasion de simplifications miraculeuses. Ce type de comportement est préjudiciable au candidat.

Q22. Les quelques candidats ayant traité cette question ont souvent eu du mal à justifier la somme correspondant simplement à une disjonction de cas.

Q23. Question très classique, abordée dans une large partie des copies mais qui se limite à la partie calculatoire. En revanche, le traitement est décevant, la dérivation d'une série entière, l'unicité de ses coefficients étant trop rarement évoquées, la synthèse trop souvent ignorée.

Partie IV

Comme pour les deux premières parties, la quasi totalité des candidats a au moins débuté cette partie. Cette partie a été l'occasion de mettre en avant les copies propres et structurées.

Q24, **Q25** et **Q26**. Essentiellement calculatoire. Il s'agissait de mettre en œuvre les compétences de dérivation. On constate beaucoup d'erreurs sur la formule de Leibniz et les dérivées successives d'un monôme. Trop de copies se résument à une succession de calculs sans rédaction, ni parfois conclusion.

Q27, **Q28** et **Q29**. Les résultats étant donnés dans l'énoncé, beaucoup de candidats s'adonnent à des contorsions sans scrupule et donc stériles pour aboutir.

Q30. Il suffisait de lire le sujet pour répondre à cette question.

Partie V

Q31. Le lien avec la question **Q21** donnant l'identité de Vandermonde n'a pas souvent été fait. L'argument de positivité pour la loi est presque systématiquement omis.

Q32. La définition de l'espérance d'une variable aléatoire à support finie est bien connue, la succession de calculs à mener et le réinvestissement de la formule de Vandermonde n'ont été réalisés que par un nombre restreint de candidats.

Q33. Une des questions difficiles ou techniques du sujet. Le caractère hypergéométrique n'a pas posé de problème. En revanche, le calcul juste de la fonction génératrice, qui nécessitait l'utilisation de **Q14**, n'a jamais été obtenu.

Q34. Il était attendu la mise en avant d'un schéma de Bernoulli et la justification du schéma binomial.

Q35. Quelques candidats ont su parler de prélèvements et de leur description pour arriver à justifier la loi de Y. L'argument d'équiprobabilité permettant de réutiliser **Q22** était presque systématiquement absent.

Q36. Question très rarement abordée. Souvent seule la relation entre Y et les Y_i était proposée, suivie de l'utilisation de la linéarité de l'espérance. Par contre, l'espérance des Y_i a rarement été justifiée. Quelques candidats ont exprimé Y comme étant l'union des Y_i...

Q37. Question très rarement traitée, l'obtention du paramètre de la loi de Y_iY_j se limitant à des réponses sans aucune justification.

Q38. La formule de Huygens est connue mais, la plupart du temps, les calculs se sont arrêtés là.

Q39 et **Q40**. Questions rarement traitées mais qui pouvaient être abordées indépendamment du reste du sujet. La recherche d'équivalent pour $\mathbb{P}(X = k)$ est souvent entamée, mais non aboutie.

Conclusion

Le jury encourage vivement les candidats à utiliser un brouillon et à ne pas s'engager dans la rédaction aussitôt après avoir lu l'énoncé, sans prendre un temps de réflexion suffisant. Il faut privilégier la qualité sur la quantité, dans la présentation et surtout dans la précision de l'argumentation. Les candidats qui avancent dans un sujet de manière presque linéaire, en donnant tous les arguments importants, qui signalent honnêtement les manques ou les incohérences de leurs propositions ont toujours d'excellentes notes.

Enfin, le jury ne peut qu'encourager les candidats à mettre l'accent sur la maitrise du cours, tant au niveau des connaissances que des méthodes. Ce n'est qu'en maitrisant ces points que l'on peut s'engager avec efficacité dans la résolution de problèmes et proposer des solutions correctes.