

Mathématiques 1

Présentation du sujet

Le sujet traite des marches aléatoires sur un graphe et s'intéresse au comportement asymptotique de mesures de probabilités. Il vise aussi à établir le théorème de Perron-Frobenius dans le cas d'une matrice stochastique. Une application à la gestion du flux des pages du web est ensuite présentée.

Le problème est constitué de trois grandes parties :

- une première partie où on étudie quelques généralités sur les marches aléatoires ainsi que deux exemples simples ;
- une deuxième partie qui propose un résultat de convergence de suites de matrices stochastiques ;
- une troisième partie où on applique ce qui précède à des modèles de navigation sur le web.

Une bonne maîtrise des raisonnements élémentaires de probabilités était indispensable pour traiter correctement ce sujet. Il était également attendu des candidats qu'ils connaissent les rudiments de la réduction (définition des éléments propres, théorèmes de diagonalisabilité...). Enfin, quelques autres chapitres (suites réelles ou à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie, nombres complexes...) entraient également en jeu.

Analyse globale des résultats

La première partie a été abordée presque entièrement par tous les candidats et certaines questions ont été très bien traitées. En revanche, le cours n'est pas toujours bien appris et certains résultats, pourtant très importants, ne sont parfois pas cités correctement (formule des probabilités totales, réduction d'une matrice symétrique réelle...).

La deuxième partie a aussi été très largement étudiée mais avec moins de succès dans l'ensemble et avec des niveaux de réussite contrastés. Beaucoup de très bonnes réponses ont été proposées, mais la rigueur mathématique était parfois absente dans certaines explications : par exemple, le jury relève des confusions sur les inégalités triangulaires ou sur la définition de suites adjacentes. Beaucoup de candidats ont oublié la positivité dans la définition d'une distribution de probabilités.

La troisième partie a été moins abordée, sans doute à cause de sa position en fin de problème, mais aussi car elle demandait d'avoir une vision synthétique des résultats de la deuxième partie. Il est dommage que peu de candidats aient répondu de manière correcte aux questions d'informatique, qui étaient pourtant assez classiques.

Concernant la présentation des copies, une majorité est assez clairement présentée, avec des questions numérotées correctement, traitées dans l'ordre et des résultats encadrés. Ceux qui dérogent à ces règles de base font tout de suite mauvaise impression et prennent le risque d'être moins bien compris par les correcteurs.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

Le jury souhaite insister sur un certain nombre de points qui ont souvent posé problème aux candidats.

- Les candidats doivent faire un effort de présentation des copies, numéroté les questions, les traiter dans l'ordre (quitte à laisser des blancs pour y revenir) et mettre en évidence leurs résultats.
- L'utilisation des abréviations doit être limitée : si certaines (CNS, SSI...) sont très couramment utilisées, d'autres (FPT pour formule des probabilités totales) le sont nettement moins. De même, l'emploi de symboles mathématiques tels que $\forall$, $\Leftrightarrow$, ne peut figurer que dans des assertions mathématiques et est proscrit à l'intérieur d'une expression écrite en français.
- Un raisonnement doit être articulé avec des mots clés (considérons, or, donc, car, en effet), les hypothèses et les objectifs doivent être clairement identifiés.
- Lorsqu'une question propose de démontrer une formule qui est proposée, il ne s'agit pas simplement de recopier ladite formule : un minimum de justifications est attendu !
- Les questions doivent être lues avec plus d'attention ; par exemple, dans une question « Montrer qu'il existe un unique... », il ne s'agit pas seulement de prouver une existence.
- Il est important de citer les résultats utilisés, surtout lorsque ces derniers ont un nom. Par exemple, lorsque la formule des probabilités totales est appliquée, les candidats doivent clairement le faire figurer sur leur copie et on doit également lire les mots-clés « système complet d'événements ».
- Le théorème spectral donne un résultat sur les matrices symétriques *réelles*, ce dernier mot étant parfois manquant sur les copies.
- Une suite convergente de réels strictement positifs ne converge pas nécessairement vers un réel strictement positif.
- Dans la question **Q1**, quelques candidats font une confusion entre les événements et les probabilités. En particulier, un système complet d'événements est une famille d'événements et pas de probabilités.
- Dans la question **Q4**, un argument de continuité était attendu et pas un simple passage à la limite.
- Dans les questions **Q17** et **Q18**, des candidats commettent des erreurs sur les inégalités triangulaires en écrivant que $|a - b| \leq ||a| - |b||$ alors que c'est l'inégalité contraire qui est vraie. Plusieurs candidats ont par ailleurs considéré que la valeur propre λ était réelle et donc ont écrit que $|\lambda| \leq 1$ revient à $-1 \leq \lambda \leq 1$ alors que λ est un nombre complexe.

Conclusion

Le sujet était plutôt long mais la progressivité du texte et la diversité des chapitres mathématiques nécessaires (probabilités, réduction, nombres complexes, algorithmes...), ont permis à tous les candidats de traiter de nombreuses questions et de mettre en évidence leurs compétences. Quelques lacunes sur des notions de base ont malheureusement aussi été repérées.

De nombreux candidats ont su montrer leur maîtrise du langage mathématique en général et, plus spécifiquement, des points qui étaient nécessaires pour aborder les diverses parties de ce problème : le langage des probabilités, la convergence des suites (de réels ou de vecteurs), les majorations ou minoration, la définition du produit matriciel, la diagonalisation des matrices... Quelques candidats ont abordé avec succès les questions plus difficiles qui parsemaient le sujet et le jury tient à les en féliciter.

Les correcteurs ont constaté cette année une meilleure maîtrise de la rédaction (logique, double implication, clarté des calculs entrepris...). Une partie non négligeable des copies propose une rédaction très agréable à lire en mêlant rigueur, justesse et clarté. Le jury encourage par ailleurs vivement les candidats à utiliser un brouillon et à ne pas commencer systématiquement la rédaction aussitôt l'énoncé lu. De nombreuses erreurs grossières pourraient ainsi être évitées.