1.4 Mathématiques 1 - filière PC

1.4.1 Présentation du sujet

Soient X une variable aléatoire réelle, $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi de X. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

Si X est d'espérance finie μ et de variance σ^2 avec $\sigma \in \mathbb{R}^{+*}$, le théorème limite central assure que la suite de variables aléatoires $\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire normale centrée réduite. En d'autres termes, si on pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$, alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(T_n \leq x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \mathrm{d}t.$$

Il existe plusieurs démonstrations de ce théorème. La plus courante consiste à appliquer le théorème de continuité de Paul Lévy. Notant Φ_Y la fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle Y, on vérifie en effet que la suite de fonctions $(\Phi_{T_n})_{n\geq 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $x \mapsto \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$, qui est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire normale centrée réduite.

Il est naturel de se demander comment se comporte asymptotiquement la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ si X n'est plus dans $\mathcal{L}^2$. Dans les années 1920, Paul Lévy a complètement résolu ce problème en mettant en évidence les *lois stables* qui portent son nom.

Le sujet est consacré à la démonstration d'un cas particulier de cette question. Soient désormais α un élément de $\mathbb{R}^{+*}$, X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$, symétrique, et vérifiant la condition

$$(1) \qquad P(|X| \geq n) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $M_n = \frac{S_n}{n}$. On démontre que la suite de fonctions $(\Phi_{M_n})_{n\geq 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $x \mapsto \exp\left(-\frac{\pi\alpha|t|}{2}\right)$. À ce stade, une application du théorème de Lévy (signalée à la fin du sujet, mais hors énoncé) permet de conclure que la suite $(M_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire de Cauchy de paramètre α, c'est-à-dire vers une variable aléatoire de densité $t \mapsto \frac{2\alpha}{4t^2 + \pi^2\alpha^2}$.[4]

La démonstration de la convergence simple revient à établir le développement limité

$$(2) \qquad \Phi_X(t) \underset{t\to 0}{=} 1 - \frac{\pi\alpha}{2}|t| + o(t).$$

Tel est l'objet des questions 6 à 18, les questions 1 à 5 étant consacrées à des questions probabilistes proches du cours et les questions 19 à 22 à la conclusion.

4. Les densité gaussiennes et de Cauchy sont les deux premiers exemples de lois stables.

Les questions 6 à 13 aboutissent au calcul classique de

$$(3) \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{int}}{n}$$

pour $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ (i.e. à l'étude de la série de Taylor du « logarithme principal » ; au point 1 sur le cercle de convergence).
Les questions 14 et 15 traitent de généralités sur les fonctions caractéristiques. La question 16 contient le cœur de l'argument :
afin d'établir (2), on exprime $\Phi_X(t)$ en fonctions des restes $R_n := P(|X| \geq n)$ via une sommation d'Abel (question 16), afin de tirer parti de (1). Il vient

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \Phi_X(t) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \ (\cos(nt) - \cos((n-1)t)) \,.$$

Le calcul (3) et l'hypothèse (1) amènent alors (2) sans grande difficulté.

1.4.2 Commentaires généraux

Ce sujet nécessitait une solide maîtrise des probabilités, testée dans les questions 1 à 5, 14-15 et 19-20, et de l'analyse (intégration, y compris convergence dominée et intégrales à paramètre, séries, séries de fonctions, un peu de topologie), évaluée dans les questions restantes. Il permettait de vérifier la connaissance de plusieurs théorèmes importants du cours, ainsi que la capacité à mener assez rapidement des calculs non triviaux. Le caractère fermé de la plupart des questions a conduit à un barème exigeant en fait de justifications précises.

De bon niveau, le texte restait cependant abordable. Il comprenait un nombre important de questions de difficulté moyenne, nécessitant simplement une connaissance correcte du cours, assortie à une certaine rigueur dans son application et/ou la capacité de mener à bien des calculs simples. Il a permis un étalonnement très satisfaisant des copies. Les meilleurs candidats ont su traiter l'essentiel du sujet, beaucoup ont montré des qualités importantes.

À l'inverse, un lot important de copies témoignent d'un manque de recul sur le cours et de faibles capacités calculatoires. Le premier point les conduit à produire un discours émaillé de graves confusions et très souvent dépourvu de sens ; en particulier, les notions d'espérance et d'égalité en loi sont souvent mal comprises. Pire, dans un nombre non négligeable de copies, les questions 1 à 5 donnent naissance à des écritures absurdes $P(X)$, $P(X())$. Le second point se traduit de façon particulièrement nette dans la manipulation des inégalités ; ainsi, dans les questions 6 à 11, beaucoup de copies écrivent des inégalités portant sur les nombres complexes.

1.4.3 Analyse détaillée des questions

Q1 - Beaucoup de candidats oublient que, pour définir l'espérance, une condition de convergence absolue est nécessaire.

Q2 - Beaucoup d'erreurs dans cette question très proche du cours. En particulier, confusion fréquente entre « X est bornée » et « X ne prend qu'un nombre fini de valeurs », parfois parce que X est implicitement supposée à valeurs entières.

Q3 - Le premier point était immédiat en appliquant un théorème du cours ; il a parfois donné lieu à des développements étranges. Pour le second point, assez peu de candidats invoquent l'argument simple selon lequel une variable aléatoire dont le carré est d'espérance finie est elle-même d'espérance finie.

Q4 - Beaucoup de candidats confondent égalité en loi et égalité, ce qui les conduit à écrire des relations du genre $f(X) = f(-X) = -f(X)$.

Q5 - Beaucoup de discours sans contenu, qui n'utilisent pas l'indépendance pour montrer que $(-X, -Y)$ et (X, Y) ont même loi.

Q6 - Le résultat était une simple application de la régularité d'une intégrale fonction de sa borne supérieure, qu'il fallait étayer en justifiant la bonne définition de l'intégrale, i.e. en justifiant que $1 - uz \neq 0$ pour $u \in [0, 1]$. Le problème de définition est largement ignoré, ou étrangement abordé via la « règle de Riemann » en une borne, alors que la fonction intégrée est continue sur le segment $[0, t]$. Certains candidats compliquent les choses en se ramenant à une intégrale à paramètre et donnent un résultat (pas toujours juste) sous forme intégrale D'autres utilisent, de manière purement formelle, un logarithme complexe hors programme.

Q7 - Question très élémentaire, reposant sur l'inégalité triangulaire et son cas d'égalité. La seconde partie n'est quasiment jamais traitée. Beaucoup de candidats écrivent des inégalités entre nombres complexes.

Q8 - Bon nombre de candidats voient qu'il s'agit de permuter une limite et une intégrale. En revanche, les justifications (majoration directe, convergence uniforme ou dominée) ne sont complètes que dans peu de copies.

Q9 - La locution « formule de Taylor » a posé problème. Certaines copies évoquent la formule de Taylor-Young (inutilisable ici). D'autres affirment sans preuve que L est somme de sa série de Taylor en 1.

Q10 - Très peu de justifications pour la première partie, et des confusions entre continuité et continuité séparée. Dans la seconde partie, l'utilisation du théorème des bornes atteintes est rarement vue.

Q11 - Cette application du théorème de classe C^1 des intégrales à paramètre a été largement abordée. Une partie significative des candidats connaît les hypothèses du théorème et vérifie correctement les hypothèses de domination. D'autres commettent des erreurs surprenantes (par exemple en dérivant sous l'intégrale par rapport à la variable d'intégration).

Q12 - Il s'agissait d'un petit calcul fondé sur la question précédente. Certains candidats effectuent un changement de variable à valeurs complexes dans l'intégrale. Ceux qui calculent correctement F' ne donnent pas toujours un argument complet pour F ; dans certaines copies, on lit même $F(t) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} F'(t)\ \ dt$, ce qui rassemble beaucoup de fautes en un espace très court.

Q13 - Question de synthèse, qui a permis de récompenser les candidats ayant fait l'effort de comprendre où l'énoncé voulait en venir.

Q14 - La bonne définition, qui découle de la question 2, est souvent omise. Le reste de cette question facile est traité convenablement, au fait près que la valeur absolue de $|\Phi_X(t)|$ disparaît assez fréquemment.

Q15 - La continuité reposait sur un argument de convergence normale, qui n'est vu que par une minorité de candidats.

Q16 - La partie « formelle » des deux calculs est assez souvent comprises dans les copies qui abordent ces questions, même si le passage « de $\mathbb{Z}$ à $\mathbb{N}$ » est souvent savonné. En revanche, les justifications sont rarement complètes.

Q17 - Dans la première sous-question, l'argument de convergence normale n'est pas souvent vu. Les sous-questions suivantes sont rarement abordées.

Q18 - La première partie est rarement traitée. Pratiquement aucun des candidats qui abordent la seconde partie ne voit que la réponse est non, et que l'on a en fait, par parité de Φ_X, la relation (2) (qui s'impose aux candidats ayant bien traité par la suite la question 21).

Q19 à 22 - Ces questions ont été partiellement abordées par les meilleurs candidats et ont également fait l'objet de grappillages. Dans le second cas de figure, les justifications ont souvent été très insuffisantes.

1.4.4 Conseils aux futurs candidats

Nous incitons les candidats à apprendre leur cours de manière réfléchie, afin de maîtriser en profondeur les notions et les théorèmes du programme. Nous leur conseillons également de s'entraîner intensivement au calcul, en particulier à la manipulation des inégalités.

Il est plus fructueux de bien traiter une partie des questions plutôt que de produire un discours inconsistant pour chacune d'entre elles : les tentatives de bluff n'apportent aucun point et préviennent très défavorablement le correcteur quant à l'ensemble de la copie. Nous rappelons enfin que les questions « faciles » doivent être correctement et complètement rédigées pour être valorisées, surtout en début de problème.

Nous soulignons également l'importance d'une lecture précise de l'énoncé : beaucoup de candidats traitent les questions en ajoutant des hypothèses superflues : ainsi, dans les questions 1 et 2, les variables aléatoires considérées ne sont pas à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

Rappelons pour conclure l'importance de la présentation. Les copies peu lisibles sont pénalisées ; on recommande aux candidats d'employer une encre foncée, qui reste bien visible sur les copies scannées. Une présentation soignée (écriture nette, absence de ratures, résultats encadrés) est très appréciée. Enfin, il est demandé aux candidats de numéroter leurs copies de façon cohérente : les correcteurs n'ont pas à se voir confrontés à un jeu de piste !

1.5 Mathématiques 2 - filière PC

1.5.1 Généralités et présentation du sujet

Le sujet tourne autour d'un théorème de Polya sur les polynômes réels à racines toutes réelles. On dispose pour les polynômes[5] de deux écritures, l'une additive sous la forme $\sum_k a_k X^k$ et l'autre multiplicative $\prod_k (X - a_k)$ et alors que les relations coefficients-racines permettent de passer de l'écriture multiplicative à l'additive, on sait depuis Galois que le passage dans l'autre sens n'est en général pas possible.

Partant de l'observation aisée découlant d'une application directe du théorème de Rolle, que le polynôme dérivé d'un polynôme à racines toutes réelles est encore à racines toutes réelles, et de la linéarité de la dérivation la rendant transparente dans l'écriture additive des polynômes (il suffit, à décalage près, de multiplier la suite des coefficients par les éléments de la suite $(1, 2, 3, \cdots)$), suivant Polya, on s'intéresse alors aux suites réelles, $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la propriété suivante : à chaque fois qu'on dispose d'un polynôme réel à racines toutes réelles, écrit sous sa forme additive $\sum_k a_k X^k$, alors le polynôme $\sum_k \gamma_k a_k X^k$ est aussi à racines toutes réelles.

Afin de ne pas rallonger encore un sujet déjà très long, le théorème de Schur est admis et le lecteur curieux pourra en trouver une preuve, reposant notamment sur le résultat de la **Q8**, dans le livre de B. Levin *Distribution of Zeros of Entire Functions*, au chapitre VIII section 2.

Avant d'attaquer le coeur de la démonstration, on parcourt une partie du programme de PC où l'on peut trouver des polynômes réels à racines toutes réelles :

— en algèbre linéaire avec les polynômes caractéristiques des matrices symétriques,

— les polynômes orthogonaux,

5. Pensez à l'analogie entre $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}[X]$ avec l'écriture en base 10 et la factorisation en facteurs premiers.