2.7 Mathématiques 2 - filière PSI

2.7.1 Généralités et présentation du sujet

- Ce problème s'intéresse à l'ensemble $\mathcal{E}_n$ des matrices normales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire commutant avec leur transposée.
  Après l'étude des exemples classiques des matrices symétriques, antisymétriques et orthogonales, il propose une démonstration circulaire de l'équivalence entre les quatre affirmations suivantes pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:
  ($\mathbf{C_1}$) Il existe $P \in \mathbb{R}[X]$, tel que ${}^tA = P(A)$.
  ($\mathbf{C_2}$) La matrice A est normale.
  ($\mathbf{C_3}$) Pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\|{}^tAX\| = \|AX\|$, où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne usuelle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
  ($\mathbf{C_4}$) A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale par blocs de taille $(1,1)$ ou $(2,2)$ du type rT, avec $r > 0$ et $T \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.
  Puis, il définit l'exponentielle d'une matrice A, notée $\mathrm{Exp}(A)$, comme la limite de la suite vectorielle $\left(\sum\limits_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}A^k\right)_{p\in\mathbb{N}}$ dans l'espace normé $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.
  Il propose enfin deux caractérisations de l'image de l'ensemble $\mathcal{E}_n$ par l'application Exp et l'applique à une matrice de permutation.
- Le sujet, de difficulté progressive, requiert :
  — de solides connaissances d'algèbre linéaire (opérations sur les matrices par blocs, changement de bases) et surtout bilinéaire (produit scalaire, norme euclidienne, matrices orthogonales, réduction des matrices symétriques réelles) ;
  — de l'aisance dans l'usage des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ et des polynômes de matrices ;
  — des notions sur les séries numériques ;
  — une bonne maîtrise des espaces vectoriels normés de dimension finie (convergence, topologie).
- Alors que les dix premières questions sont largement abordables à condition de faire preuve de rigueur et de clarté, les suivantes demandent davantage d'engagement et d'initiative (notamment les questions 11, 12, 15, 20 et 21).

2.7.2 Commentaires généraux

Une majorité de candidats a concentré sa composition sur les questions 1 à 10, 13, 16 et 17 et, dans une moindre mesure sur les questions 14, 18 et 19. Plus rares sont les candidats ayant abordé les questions de fin de parties **IV**, **V** et **VI**, souvent de manière très partielle et imprécise.
Dans un nombre non négligeable de copies, on rencontre des problèmes de quantification et les objets mathématiques utilisés ne sont parfois pas définis. La compréhension même du sujet a échappé é certains candidats (notamment la condition ($\mathbf{C_4}$)). La rédaction manque ainsi souvent de soin et de cohérence.
La notion de polynôme est mal maîtrisée par un bon nombre de candidats. Ainsi, on rencontre X^{-1}, $\overline{X}$ ou $\mathrm{Exp}(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$. L'écriture $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ peut être envisagée à condition d'avoir précisé que la suite (a_k) est nulle à partir d'un certain rang.

2.7.3 Analyse détaillée des questions

Q1. La définition d'une relation d'équivalence est trop souvent méconnue et fait pourtant partie du programme de première année. Il manque ainsi fréquemment un à deux des trois items de la définition. Pour la symétrie et la transitivité, il est attendu de vérifier que les matrices ${}^tQ$ et PQ sont orthogonales.

Q2. Dire que l'on considère le polynôme P tel que $P(A) = A$ n'est pas une définition.

Dans une bonne partie des copies, le recours au produit scalaire est systématique pour montrer que si A est symétrique ou antisymétrique, $\|{}^tAX\| = \|AX\|$, alors que ce résultat est quasi-immédiat en utilisant la définition de A.

Le « théorème spectral », et non le « théorème spectral**e** », précise non seulement qu'une matrice symétrique réelle est diagonalisable, mais qu'elle est **orthogonalement** semblable à une matrice diagonale. Une matrice diagonale étant diagonale par blocs de taille (1,1).

Q3. Cette question est assez bien traitée. On attend ici une justification, même sommaire, du fait que ${}^tAA = I_n$. On rencontre trop souvent ${}^t(A{}^tA) = {}^tAA$.

Q4. Traitée par la plupart des candidats, Ã l'exception de la condition $(\mathbf{C_1})$ pour $T \in \mathrm{SO}_2$. La matrice T n'est pas antisymétrique lorsque $\cos\theta \neq 0$.

Q5. Abordée par presque tous les candidats. On attend ici une justification détaillée de la commutation de A et $P(A)$.

Q6. Cette question n'a pas posé de problème.

Q7. On trouve encore des problèmes de logique. Il s'agit ici simplement de montrer que si A vérifie $(\mathbf{C_3})$, alors ses coefficients vérifient les conditions énoncées. Il n'est pas question de mettre en place des équivalences. On s'étonne que de nombreux candidats n'aient pas bien lu l'indication qui permet d'éviter de se perdre dans des calculs complexes.

Deux erreurs très dommageables ont été observées de nombreuses fois :

- La condition $b^2 = c^2$ n'implique pas $b = c$.
- Pour $a \neq 0$, la matrice $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ n'est pas antisymétrique.

Q8. Question assez bien traitée, mais des candidats mélangeant les conditions $(\mathbf{C_2})$ et $(\mathbf{C_3})$. Il est important, dans un calcul un peu long, d'indiquer clairement l'endroit où l'hypothèse est utilisée.

Q9. Il ne faut pas ici se contenter de montrer que, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) \subset \mathrm{Ker}({}^tA - \lambda I_n)$, mais envisager succinctement l'inclusion réciproque.

L'orthogonalité des sous-espaces propres a donné lieu à quelques faux pas, parmi lesquels la division par λ qui n'est pas, a priori, non nul.

Q10. On attendait ici une condition nécessaire et suffisante spécifique au contexte (comme par exemple « A symétrique ») et pas une généralité du type « A est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions des sous-espaces propres de A est égale à n ».

Q11. La traduction matricielle de la stabilité d'un sous-espace vectoriel est mal connue de la très grande majorité des candidats. Il s'agit, dans un premier temps, de montrer que A est ORTS à une matrice triangulaire supérieure par blocs, puis de montrer que le bloc supérieur droit est nul.

Q12. On attend ici de la précision dans la mise en place d'une récurrence double ou forte sur la taille $n \geqslant 1$ (et non $n \geqslant 2$ ou $n \geqslant 3$) de la matrice A. Le jury ne peut se contenter d'une formulation abusive du type « par itération ». Parmi les candidats tentant d'écrire un raisonnement par récurrence, un trop grand nombre éprouve des difficultés à écrire une hypothèse correctement quantifiée sur la matrice A. Quant à l'hérédité, elle demande beaucoup de soin dans la manipulation des blocs et de la construction d'une matrice orthogonale de changement de base.

Q13. Cette question est mal traitée. Si l'unicité d'un polynôme satisfaisant la condition est établie par de nombreux candidats (avec parfois des erreurs sur le degré d'un élément de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$), son existence est souvent éludée. Quant au caractère réel du polynôme satisfaisant la seconde condition, il n'est que trés rarement obtenu de façon honnête.

Q14. Attention, $P(A)$ n'est pas la matrice de coefficient général $P(a_{i,j})$. Beaucoup de candidats n'utilisent pas l'indication et tombent dans cet écueil. Très étonnement, une large majorié ne parvient pas à traiter avec succès le cas où $\sin\theta = 0$. Le théorème de la division euclidienne doit être formulé avec précision. Le théorème de Cayley-Hamilton est, quant à lui, le plus souvent bien utilisé. On a vu quelques candidats réussir cette question sans utiliser l'indication (en particulier via une formule explicite des coefficients d'un polynôme en $R(\theta)$).

Q15. Il convient de définir ici un ensemble Z convenable, stable par conjugaison et contenant notamment les $re^{i\theta}$ (qui ne sont pas tous les mêmes !) relatifs aux blocs diagonaux de taille $(2,2)$ de la matrice diagonale par blocs. Cette mise en place soignée n'est presque jamais rencontrée et est pourtant indispensable à l'existence du polynôme P permettant d'obtenir la condition $(\mathbf{C_1})$.

Q16. De nombreux candidats sont sanctionnés parce qu'ils ne majorent pas la **valeur absolue** des deux termes généraux. Quant à la série majorante, il convient de préciser qu'il s'agit d'une série usuelle convergente (de somme l'exponentielle). L'utilisation de la règle de d'Alembert sur des termes généraux pouvant s'annuler est sanctionnée.

Nul besoin ici de parler de série de fonctions (notamment de série entière, de rayon de convergence) et donc de convergence normale. Il s'agit de simples séries numériques, dont la convergence absolue s'obtient par un simple théorème de comparaison.

Les sommes des deux séries sont obtenues par un grand nombre de candidats.

Q17. Cette question, pourtant très classique, est fréquemment abordée mais trop souvent mal traitée. Il convient, dans un premier temps, de majorer $|(AB)_{i,j}|$ indépendamment de i et j, puis d'utiliser la définition de la borne supérieure (ou du maximum) pour conclure.

Q18. La convergence normale des séries vectorielles n'étant pas au programme de PSI, il est indiqué ici de passer par la convergence des **suites coordonnées** de la suite matricielle $((S_p(A))$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_n$ et non par la « convergence des termes de la suite $(S_p(A))$ », ce qui ne veut rien dire.

L'« égalité exponentielle » demandée ensuite est bien souvent malmenée. La référence au théorème 2 est souvent absente et le passage à la limite doit être motivé, par exemple, par la continuité de l'application linéaire $M \mapsto {}^tQMQ$. Une simple locution du type « par unicité de la limite » ou « par passage à la limite » ne peut suffire.

Q19. Là encore, on trouve trop souvent des arguments flous comme ceux évoqués dans la question précédente. On attend des preuves précises mentionnant et justifiant la continuité des applications considérées. A noter que le caractère fermé de l'image réciproque du singleton $\{0\}$ par une application continue qui n'est pas à valeurs réelles n'est pas au programme de PSI.

Q20. L'utilisation des sommes partielles et la référence à **Q16** sont, la plupart du temps, absentes. Exp n'est pas un polynôme !

Les rares candidats ayant abordé la deuxième partie de cette question se sont contentés d'établir l'inclusion de $\mathrm{Exp}(\mathcal{E}_n)$ dans l'ensemble décrit par l'énoncé, sans même avoir conscience qu'il s'agit ici d'une égalité ensembliste.

Q21. De très rares candidats ont esquissé quelques lignes sur cette question, sans discours véritablement probant, probablement faute de temps.

Q22. Trés rarement abordée également. Le polynôme caractéristique $X^n - 1$ de B (on rappelle qu'il doit être unitaire) n'est presque jamais obtenu.

2.7.4 Conseils aux futurs candidats

L'énoncé doit être lu de façon approfondie de manière à s'approprier l'esprit du sujet et respecter les notations qui y sont introduites. Par exemple, la transposée d'une matrice A est notée ${}^tA$ et non A^T. Il est inutile de recopier les questions. En revanche, il convient de définir correctement les objets nécessaires au raisonnement. Les phases clés d'une démonstration doivent être mises en avant, notamment à l'occasion de la référence aux hypothèses, à une question antérieure ou à un résultat admis.

Pour rendre le discours crédible, il convient de soigner la graphie et de s'exprimer dans un français syntaxiquement correct et bien orthographié. Les accords de genre et de nombre sont trop souvent négligés. Il est vivement recommandé de ne pas mêler le français et le formalisme mathématique. Par exemple, le symbole « $\Longrightarrow$ » ne saurait se substituer à « donc » ou « par conséquent ».
Pour obtenir une bonne note, il est préférable de traiter une partie raisonnable du sujet avec un souci constant de rigueur et précision, plutôt que de parcourir de manière superficielle la totalité de l'épreuve. Par exemple, il est conseillé d'éviter les formules du genre « par une récurrence évidente » ou « en itérant ce procédé, on obtient... », en rédigeant proprement une démonstration par récurrence.
Il convient également d'éviter les affirmations dont on n'est pas convaincu et qui, de fait, ne convainquent pas le correcteur. Cette dérive s'apparente le plus souvent à du bluff et ne donne pas une bonne impression de la copie.
Quand un résultat de cours est utilisé, il doit être évoqué de manière précise et complète. Dans cette épreuve, le théorème spectral et le théorème de la division euclidienne sont trop souvent partiellement énoncés. Le fait que, pour $X \in E_n,\ \|X\| = 0$ implique $X = 0_{E_n}$ s'appelle (l'axiome de) séparation de la norme. En l'absence d'une telle précision, le correcteur ne peut faire la différence entre une omission et du bluff.
Il est vivement recommandé d'utiliser les indications fournies. Elles facilitent en général l'accès au résultat demandé. Libre à chacun de faire autrement, mais dans ce cas, il convient de bien s'assurer de la solidité du raisonnement proposé.

2.7.5 Conclusion

Ce sujet permettait à chaque candidat de s'exprimer selon son niveau. De très nombreuses questions étaient abordables par tout étudiant ayant assimilé les bases du cours et ayant assuré un entraînement minimum. Le jury recommande vivement aux futurs candidats de prendre note des conseils précédemment formulés pour aborder dans les meilleures conditions les épreuves à venir.