

# Compte rendu correction épreuve PC

Le sujet est constitué de 5 exercices dans lesquels nous avons tenté de couvrir une bonne partie du programme de façon à ce que les étudiants puissent appliquer les notions essentielles des programmes des deux années préparation au concours.

Plusieurs questions étaient des questions de cours, même si pas toujours affichées en tant que telles, ce qui aurait dû sécuriser les candidats.

## Exercice 1.

Dans cet exercice de trigonalisation d'une matrice de taille 3, nous constatons que moins d'un tiers des copies discute correctement sur la condition nécessaire et suffisante de diagonalisation, même si le polynôme caractéristique est juste. Il s'agit cependant d'un résultat important du programme de mathématiques en PC.

## Exercice 2.

Quand le candidat comprend dans la première question qu'il s'agit d'étudier la convergence de l'intégrale, la comparaison à une intégrale de Riemann est en général bien menée, bien que beaucoup oublient d'invoquer la continuité de la fonction à intégrer sur  $\mathbb{R}_+$ .

La deuxième question était facile en suivant les indications de l'énoncé : trop d'étudiants tentent d'appliquer le Théorème de dérivation sous l'intégrale, ce qui les pénalise, vu le nombre d'hypothèses à vérifier. C'est dommage.

Dans la dernière question, bien que le Théorème de convergence monotone soit en général bien appliqué, certains candidats confondent convergence de la suite et convergence de l'intégrale.

## Exercice 3.

La récurrence demandée dans la première question s'effondre souvent en raison de l'hypothèse qui ne porte que sur  $a_n$  dans la plupart des copies.

La question 2, qui est une question de cours, n'est malheureusement pas toujours bien traitée. Il arrive que le rayon de convergence dépende de l'entier  $n$  !

Le produit de Cauchy de deux séries entières ne semble pas toujours bien maîtrisé (rayon de convergence, expression des coefficients).

Rappelons que lorsque l'on effectue une intégration, apparaît nécessairement une constante que beaucoup semblent oublier.

Les dernières questions étaient des questions de cours déguisées : n'ont pas été pénalisés ceux qui le connaissait.

## Exercice 4.

Question 1 : Un grand nombre de copies donne la bonne dimension de l'espace  $F$  malgré des difficultés à prouver l'indépendance de la famille  $(I_n, M)$ .

Le reste de la question (hormis le 1.4.) est relativement bien traité. (Algèbre linéaire en dimension 2).

Question 2 : Pour beaucoup, l'équation caractéristique de la suite est bien traitée. Mais il ne faut pas confondre suites et équations différentielles, ce qui amène parfois à des combinaisons linéaires de  $e^n$  et  $e^{1/n}$ ...

## Exercice 5.

Souvent, le lien entre  $P^{(k)}(1) = 0$  pour  $k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$  et la multiplicité de la racine 1 est mal géré.

Le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt est assez bien connu surtout en dimension 2 mais tout se complique lors du calcul du troisième vecteur.

La question 3 bien que très classique est en général très mal traitée, malgré l'introduction du projeté orthogonal.

Cette dernière question n'est quasiment jamais terminée.

## Conclusion

Il nous semblait que le sujet permettait aux candidats d'utiliser les résultats du cours et quelques questions, plus fines, devaient permettre aux meilleurs de s'exprimer pleinement.

Or, il s'avère que des résultats élémentaires (rayon de convergence d'une série entière par exemple) sont méconnus de trop de candidats, et les théorèmes classiques du programme sont souvent approximatifs, mal compris. Cela est très décevant.

Dans l'ensemble, nous constatons un grand manque de rigueur dans la rédaction : il ne suffit pas de dire que clairement, on a ... pour effectuer une démonstration correcte. Rappelons qu'il est indispensable de vérifier toutes les hypothèses d'application d'un théorème pour l'utiliser.

D'une façon générale, nous avons trouvé que les copies étaient souvent mal présentées, sales, mal rédigées : des rayures dans tous les sens, des questions faites dans le désordre, des phrases sans queue ni tête, etc... Cela s'explique sans doute par le manque de professeur en présentiel depuis le mois de mars.

\* \* \* \* \*

## Sujet

### Exercice 1.

Soient  $a \in \mathbb{R}$  et la matrice  $M_a = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Pour quelles valeurs du réel  $a$  la matrice  $M_a$  est-elle diagonalisable ?
2. Pour quelles valeurs du réel  $a$  la matrice  $M_a$  est-elle inversible ?

3. Montrer que lorsqu'elle n'est pas diagonalisable,  $M_a$  est semblable à la matrice  $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

### Exercice 2.

Soit  $x$  un réel positif ou nul et  $\varphi_x$  la fonction qui à un réel  $t \in \mathbb{R}_+$ , associe  $\varphi_x(t) = \frac{e^{-t}}{1+xt}$ .

On pose alors, pour tout  $x \geq 0$ ,  $f(x) = \int_0^{+\infty} \varphi_x(t) dt$ .