ECOLE POLYTECHNIQUE — CONCOURS D'ADMISSION 2020
ENS : LYON, PARIS-SACLAY, RENNES

ÉPREUVE ÉCRITE DE MATHÉMATIQUES A, FILIÈRE MP (XLCR)

1. Présentation du sujet

Le sujet de cette année abordait la question suivante : quels sont les nombres qui peuvent être réalisés comme les valeurs propres d'une matrice symétrique à coefficients rationnels ? Le sujet était très bien équilibré et permettait d'aborder l'arithmétique des nombres et des polynômes, le calcul matriciel, l'algèbre linéaire et bilinéaire. Comme l'année précédente, peu de questions admettaient des réponses purement calculatoires et la capacité à développer une argumentation claire et une rédaction précise était nécessaire pour pouvoir traiter une grande partie du sujet.

Dans une première partie, on étudie quelques exemples en montrant que :
— $\sqrt{2}$ est bien une valeur propre d'une matrice symétrique de taille 2 à coefficients rationnels mais ce n'est pas le cas de $\sqrt{3}$;
— $\sqrt[3]{2}$ n'est jamais valeur propre d'une matrice symétrique à coefficients rationnels (quelle que soit la taille de la matrice) mais c'est vrai pour $\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

On construit également des matrices symétriques carrées, commutant entre elles, dont le carré est de la forme $q\mathrm{Id}$ pour tout $q \in \mathbb{Q}$ (l'utilité de ces matrices n'apparaissant qu'à la dernière question du sujet).

La seconde partie traite d'arithmétique classique des polynômes. Il s'agit essentiellement de montrer qu'un polynôme unitaire de degré $d \geq 1$ et de racines $(\lambda_i)_{i\leq d}$ est à coefficients rationnels si et seulement si les sommes $\sum_{i=1}^{d} \lambda_i^p$ sont rationnelles pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. On en déduit que l'ensemble des nombres algébriques est stable par somme et produit.

La troisième partie commence par la conséquence immédiate du théorème spectral : les nombres qui peuvent être réalisés comme les valeurs propres d'une matrice symétrique à coefficients rationnels sont nécessairement les racines de polynômes à coefficients rationnels dont toutes les racines sont réelles. On appelle alors $\mathcal{R}$ l'ensemble de ces nombres et on montre que $\mathcal{R}$ est un corps. On s'intéresse également à $\mathcal{R}^+$, ensemble des nombres qui sont des racines de polynômes à coefficients rationnels dont toutes les racines sont réelles positives. On montre que $\mathcal{R}^+$ est stable par somme, produit et inverse et que $x \in \mathcal{R}$ si et seulement si $x^2 \in \mathcal{R}^+$. Cette partie s'appuie largement sur la partie précédente.

Le but de la dernière partie est de montrer la réciproque : tout $x \in \mathcal{R}$ est valeur propre d'une matrice symétrique à coefficients rationnels. On y admet pour cela l'existence d'une (mystérieuse) fonction $t : \mathcal{R} \to \mathbb{Q}$ qui permet de construire une forme quadratique associée à $z \in \mathcal{R}$. On considère par ailleurs la matrice compagnon associée au polynôme minimal de z et on vérifie que le polynôme caractéristique de cette matrice est le polynôme minimal de z puis, à l'aide de la forme quadratique précédente, on construit une matrice symétrique qui a encore le même polynôme caractéristique. Cette matrice n'est pas a priori à coefficients rationnels et il faut utiliser les résultats de la première partie, en travaillant par blocs, pour trouver une matrice symétrique à coefficients rationnels dont z est valeur propre.

2. Commentaires généraux

Les questions du sujet étaient bien posées et précises et les réponses attendues, sans être évidentes, ne nécessitaient pas en général des rédactions complexes de plusieurs pages ni des vérifications fastidieuses. La qualité d'une rédaction se mesure aussi à sa concision et les candidats qui se sont perdus dans des justifications compliquées (par exemple pour les questions 2, 3 a), 6 ou 7) ont souvent perdu trop de temps et d'énergie pour aller loin dans le sujet. Comme l'année passée, trop souvent, les hypothèses des raisonnements par récurrence n'ont pas été écrites explicitement, rendant la démonstration confuse et engendrant des pertes de points facilement évitables.

Rappelons qu'un polynôme peut se décrire à l'aide de ses coefficients ou par ses racines et son coefficient dominant. Selon les questions, l'une de ces deux représentations est plus adaptée. Un candidat au concours de l'École Polytechnique ou des ENS doit être capable de passer de l'une à l'autre sans difficulté. Cela n'a pas été le cas pour certains qui ont perdu du temps, de l'énergie et des points en adoptant le mauvais point de vue (sur les questions 2 a), 6), 7), 11 a) et 12 par exemple).

Les trois premières questions ont, dans l'ensemble, été bien traitées, mais, dès la question 2 c), certains candidats ont commencé à grappiller des points en passant directement à la deuxième partie. Cette stratégie s'est rarement révélée payante. Il est largement préférable d'essayer d'avancer linéairement dans un sujet : un candidat qui aurait parfaitement traité les trois premières parties aurait eu 17 et les premières questions d'un problème, assez simples, permettent en général de mettre le candidat en confiance en rapportant un nombre de points non négligeable.

Quelques copies, une vingtaine, étaient excellentes, certaines ayant traité l'intégralité du sujet.

Rappelons, comme l'année passée, quelques recommandations importantes. Nous insistons sur l'importance d'une rédaction rigoureuse et soignée, ainsi que sur une mise en valeur claire de la structure de la copie (numérotation des questions et présentation adéquate des résultats). Rappelons enfin que, si la pondération des questions est généralement proportionnelle à leur difficulté, il est absolument nécessaire de prendre le temps de fournir une rédaction correcte des réponses données, y compris pour les résultats élémentaires.

3. Examen détaillé des questions

Partie 1.

1. Question abordée dans la majorité des copies. On ne pouvait pas se contenter de donner la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ sans dire au moins que son polynôme caractéristique est $X^2 - 2$ qui admet $\sqrt{2}$ comme racine. Certaines copies proposent des matrices non symétriques, ou à coefficients irrationnels, comme

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Il est regrettable de perdre des points sur cette question.

2a. Question abordée dans la majorité des copies. Il suffisait d'écrire que $\sqrt{3}$ était racine du polynôme caractéristique, mais la grande majorité des candidats a introduit l'autre valeur propre, et raisonné de manière plus ou moins adroite, et plus ou moins correcte, pour aboutir à la conclusion que c'était $-\sqrt{3}$. Ce temps perdu a sans doute empêché les candidats d'aller loin dans la suite du sujet.

Une erreur très fréquente a été d'affirmer que $\sqrt{3}+x$ ne peut être rationnel que si $x = -\sqrt{3}$. Une autre erreur fréquemment faite, de manière plus ou moins explicite, a consisté à affirmer que $\mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \{0\}$.

2b. Question abordée par quasiment toutes les copies. Il suffisait de considérer les cas possibles modulo 3.

Un certain nombre de candidats ont utilisé le petit théorème de Fermat pour résoudre cette question, ce que le jury a accepté. Par contre, le raisonnement par récurrence que certains ont fait était un choix maladroit. Finalement, certains ont raisonné sur la parité de n, ce qui est un manque certain de compréhension mathématique pour un problème modulo 3 ...

2c. Beaucoup de candidats ont confondu "premiers entre eux dans leur ensemble" et "premiers entre eux deux à deux". Ainsi, après avoir constaté que l'équation imposait que x et y soient divisibles par 3, ils concluaient à l'inexistence du triplet cherché.

2d. Quelques candidats ont oublié que les coefficients des matrices étaient rationnels, et non entiers. Parmi les autres, beaucoup, ayant vu qu'une matrice de $S_2(\mathbb{Q})$ admettant $\sqrt{3}$ comme valeur propre fournissait une solution entière de l'équation diophantienne du 2c, ont cherché à montrer (voire prétendu y arriver) que cette solution était formée de trois entiers premiers entre eux dans leur ensemble, alors qu'il suffisait de les diviser par leur pgcd.

3a. Cette question a été souvent traitée. Elle a parfois permis à des candidats qui l'avaient laissée de côté de traiter la question 1. Que les candidats expérimentent sur leur brouillon pour trouver B est naturel, mais certains ont mis sur leur copie des pages de calculs, concluants ou non, et qui nuisaient à la clarté de la copie.

3b. L'hypothèse de récurrence méritait d'être explicitement posée (notamment en quantifiant le n). La vérification de la commutativité de la famille construite a parfois été faite de manière un peu superficielle. Une erreur assez fréquente a consisté à dire que si une matrice M_{d+1} commute à une matrice M_d qui elle-même commute à $M_1, \ldots, M_{d-1}$, alors M_{d+1} commute à $M_1, \ldots, M_{d-1}$.

Il n'y avait pas unicité de la solution, mais parmi les solutions qui ont été proposées, celle qui consistait à poser

$$M_{k+1} = \begin{pmatrix} M_k & I_n \\ I_n & -M_k \end{pmatrix}$$

n'en était pas une, car les matrices ainsi construites ne commutent pas. Cela a rendu le jury d'autant plus suspicieux quand la commutativité a été invoquée comme évidente.

3c. Cette question a souvent été bien traitée. Certains candidats ont subitement perdu de vue que l'on cherchait des matrices à coefficients rationnels et ont réintroduit des racines carrées d'entiers.

4a. L'irrationnalité de $\sqrt[3]{2}$ a été en général bien traitée. La suite de la question était plus difficile, car il fallait montrer, d'une manière ou d'une autre, que $X^3 - 2$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$. Peu de candidats ont réussi à le faire de manière complètement satisfaisante, le point délicat étant de montrer que $\sqrt[3]{2}$ n'est pas racine d'un polynôme de degré 2 à coefficients rationnels.

4b. Seuls les candidats qui avaient compris la question précédente ont traité cette question. Il s'agissait d'une application directe du théorème spectral. Il est donc dommage que les copies qui ont su faire la question 10 n'aient pas traité la 4b.

5. Cette question, qui était un peu isolée dans le sujet, a été traitée complètement et assez rapidement par une petite proportion des candidats, et pas abordée par le reste. Certains donnent la bonne matrice de permutation mais se contentent de dire qu'elle admet $e^{\frac{2\pi i}{n}}$ comme valeur propre car $X^n - 1$ est un polynôme annulateur de la matrice (c'est aussi le cas de l'identité ...)

Partie 2.

6. Cette question a été l'une des plus généralement traitées, et bien. Certains candidats ont toutefois purement et simplement oublié de montrer la première égalité.

7. Certains candidats ont cherché à montrer le résultat en utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, ce qui pour développer des séries géométriques était un peu maladroit (notons par ailleurs que le terme "série géométrique" n'est apparu que dans de très rares copies). D'autres ont oublié que les racines de P pouvaient être complexes. Le jury a aussi fait face à des invocations de Fubini ou de théorèmes de regroupement des termes d'une série pour une simple linéarité de la limite. Cette question a néanmoins été globalement bien traitée.

8a. Cette question était une des questions assez difficiles du problème. Certains ont étudié les dérivées successives en 0 de f, avec succès. D'autres ont utilisé la matrice compagnon du polynôme P, dont les traces des puissances sont les N_n.

8b. Cette question, plus compliquée que la précédente, était de plus difficile à rédiger, et peu y sont parvenu correctement (il fallait effectuer une récurrence descendante). Beaucoup de candidats ont invoqué de manière un peu vague des "relations racines-coefficients", aboutissant parfois à la conclusion que toutes les racines de P étaient rationnelles.

8c. Dans cette question, beaucoup ont oublié de traiter le cas où 0 était racine, éventuellement multiple, de P.

9. Traitée par une moitié des copies, généralement très bien.

Partie 3.

10. Cette question est l'une de celles où des candidats qui n'avaient traité que peu de questions dans les parties précédentes ont repris le fil du sujet. Elle a été généralement bien traitée, parfois tout de même avec des justifications qui sans être

fausses étaient inutilement longues. Par exemple, un certain nombre de candidats ont invoqué le théorème de Cayley–Hamilton pour prouver que les racines du polynôme caractéristique M sont des valeurs propres de M. Certaines copies ont cru nécessaire de reprouver que les valeurs propres d'une matrice réelle symétrique sont réelles, ce n'était évidemment pas nécessaire (d'autant que le théorème spectral était rappelé en préliminaire).

11a. Plus de la majorité des candidats a traité cette question, en comprenant en général qu'il fallait utiliser la question 9. Toutefois, beaucoup d'imprécisions ont fait perdre des points à des candidats : oubli de montrer que l'ensemble des nombres totalements réels n'est ni vide ni réduit à $\{0\}$ (si l'on montre seulement que $1 \in \mathcal{R}$ mais pas l'opposé, alors on ne peut pas conclure que $0 \in \mathcal{R}$), oubli de montrer que l'opposé d'un nombre totalement réel est totalement réel (plusieurs copies ont affirmé que si α est racine du polynôme P, alors $-\alpha$ est racine de $-P$). Notons que certains ont voulu montrer directement que $x - y \in \mathcal{R}$ ou encore $\frac{x}{y} \in \mathcal{R}$, c'est un petit manque de jugement : ou bien le fait qu'un ensemble est un groupe provient de théorèmes généraux et alors cela ne nécessite pas beaucoup d'arguments, ou bien c'est plus délicat et alors il vaut mieux distinguer la stabilité de la loi interne de l'existence d'un inverse.

11b. Tous les candidats qui ont traité la question précédente ont aussi traité cette question, qui ne posait pas de difficulté supplémentaire particulière. Certaines copies toutefois sont allées trop vite en confondant totalement positif avec totalement réel et positif (par exemple $\sqrt{2}$ n'est pas totalement positif)

12. Cette question a été plutôt mal traitée dans la majorité des copies, les deux implications ayant leur difficultés propres. Par exemple, pour montrer que x est totalement réel, on peut considérer le polynome $P(X^2)$ où P annule x^2, il est alors clair que ce polynôme est à coefficients rationnels ... à condition de le voir à l'aide de ses coefficients et pas de ses racines. Dans l'autre sens, il valait mieux passer par une représentation à l'aide de racines.

Partie 4.

Dans toute cette dernière partie, une partie des candidats est passée à côté du problème, qui était l'interaction entre réels et rationnels.

13a. Cette question nécessitait d'avoir bien saisi les définitions assez nombreuses qui figuraient dans le chapeau de la partie, et de les mettre en œuvre correctement. La réussite de cette question a été très corrélée (positivement) à la réussite de la question précédente. Le jury a été satisfait de constater que d'assez nombreux candidats ont su relier la stricte positivité de $B(X, X)$ à la minimalité du polynôme Z.

13b. Question très intéressante et très simple à condition de comprendre que l'inversibilité d'une matrice à coefficients rationnels est un problème rationnel (autrement dit, le noyau est un $\mathbb{Q}$-sous-espace vectoriel par le pivot de Gauss par exemple). De nombreuses réponses à cette question commençaient en considérant une valeur propre de S, ce qui menait à une impasse puisque les vecteurs propres associés n'ont plus de raison d'être rationnels. L'argument, simple, a été trouvé par moins d'une copie sur trois.

14. Beaucoup de tentatives de grappillage à cette question qui illustrent souvent un manque de compréhension des candidats. La difficulté de la question provient surtout du caractère défini de la forme et un peu de son caractère positif. Au lieu de

quoi, de nombreux candidats ont écrit des pages pour justifier le caractère bilinéaire symétrique qui méritait juste une phrase du type “La forme B est symétrique car S est symétrique et bilinéaire par linéarité du produit matriciel”. Cette partie-là ne donnait que très peu de points. Ces mêmes candidats ont alors évacué en une ligne le caractère défini et positif en invoquant 13a et 13b sans comprendre que la positivité est prouvée sur les vecteurs rationnels et nécessite un argument de continuité pour passer aux vecteurs réels et que le caractère défini nécessite d'appliquer le théorème spectral (il serait utile que les candidats aient en tête la forme $x^2 - y^2$ sur $\mathbb{R}^2$).

Très peu de copies sont allées plus loin dans le sujet.

15a. La mention de l'orthogonalisation de Gram–Schmidt a été peu fréquente, peu de copies ont compris et expliqué qu'il fallait renoncer à la normalisation pour rester dans le monde rationnel.

15b. Les candidats qui avaient répondu à la question précédente ont souvent su répondre à celle-ci.

16. Cette question, classique, est l'une de celle qui a été abordée dans presque toutes les copies. Très souvent, les manipulations sur les lignes proposées ne marchent pas (beaucoup de copies proposent $L_1 \leftarrow L_1 + \sum_{i=2}^{d} L_i X^i$ par exemple). Il s'agit d'une question qui est quasiment du cours où le jury ne peut pas se contenter d'approximations.

17a. Quelques candidats ont fait le calcul demandé et su utiliser les propriétés du polynôme Z pour démontrer la symétrie de SM.

17b. Quelques candidats ont su répondre correctement à cette question qui est finalement assez simple.

18. De très rares candidats ont abordé sérieusement cette question. Il est tout de même à noter qu'une solution essentiellement complète a été donnée dans quelques copies.

4. Répartition des notes des candidats français

Notes	Nombre de copies	Pourcentage
$0 \leq N < 4$	171	$10,72\%$
$4 \leq N < 8$	613	$38,43\%$
$8 \leq N < 12$	534	$33,48\%$
$12 \leq N < 16$	220	$13,79\%$
$16 \leq N < 20$	57	$3,57\%$
Total	1595	100%
	Note moyenne	$8,46$
	Écart-type	3,74