départir d'une attitude fréquente de nonchalance voire d'indifférence, et de manque de combativité au cours de l'épreuve. Ne pas renoncer, rester mobilisé pendant toute la durée des concours, voilà l'attitude qui permettra aux étudiants de réussir. Car comme disait Amy Sherald : *« People who don't quit eventually rise to the top, because the world is full of quitters ».*

1.4. Mathématiques I — PC

Présentation du sujet

Pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \mathbb{R}$, posons

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad S_{r,p}(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(pn)^r}{(pn)!} z^{pn}.$$

Le but essentiel de ce problème est d'établir le résultat suivant.

Théorème 1. Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \mathbb{R}^+$. Alors

$$S_{r,p}(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{p} x^r e^x.$$

La partie I justifie le fait que la série entière définissant $S_{r,p}$ a pour rayon de convergence $+\infty$ et fait calculer $S_{0,1}$ et $S_{0,2}$ au moyen de fonctions usuelles.

La partie II est consacrée à la démonstration du théorème pour $p = 1$. Pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$, soit X_x une variable de Poisson de paramètre *x*. La démonstration part de l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad S_{r,1}(x) = e^x \, E({X_x}^r).$$

On utilise alors la concentration de X_x autour de x pour montrer que, lorsque *x* tend vers $+\infty$, $E(X_x^r) \sim x^r$. Le calcul combine l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev et l'utilisation ingénieuse d'un argument de convexité.
La partie III achève la démonstration du théorème 1. Un argument classique permet d'extraire de $S_{r,1}$ la somme correspondant aux multiples de p :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad S_{r,p}(z) = \frac{1}{p} \sum_{\omega \in \mathbb{U}_p} S_{r,1}(\omega z).$$

Il faut alors voir que, pour ω dans $U_p \setminus \{1\}$, $S_{r,1}(\omega x)$ est négligeable devant $S_{r,1}(x)$ lorsque *x* tend vers $+\infty$, ce qui provient d'une transformation d'Abel et d'estimations asymptotiques non immédiates des quantités $u_{k+\lfloor x \rfloor}(x)$, où l'on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad , \forall x \in \mathbb{R} \qquad u_n(x) = \frac{n^r}{n!} x^n.$$

La partie IV applique le théorème obtenu à la démonstration de l'énoncé ci-après.

Théorème 2. Soit f l'unique solution de l'équation différentielle $\forall t \in R,\ tx''(t) - x(t) = 0$, développable en série entière sur **R** et telle que $f'(0) = 1$. Alors

$$f(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{t^{1/4}}{2\sqrt{\pi}} \exp(2\sqrt{t}).$$

La preuve de ce dernier résultat est très simple : on calcule les coefficients du développement en série entière de f, on les estime via la formule de Stirling et on combine le théorème 1 au lemme de comparaison asymptotique des séries entières, admis par l'énoncé.

Commentaires généraux

Le sujet, d'un intérêt mathématique soutenu, nécessite une bonne maîtrise des thèmes suivants : séries, séries entières, calcul asymptotique, probabilités. Il teste les candidats de manière significative sur les programmes d'analyse et probabilités des deux années. L'énoncé, bien calibré, comprend des questions de niveau très varié. Il permet d'évaluer les qualités techniques des candidats, leur connaissance et leur compréhension du cours, ainsi que leur capacité à rentrer dans une démonstration assez complexe.

Le texte a donc fort bien joué son rôle. Les meilleurs candidats ont compris l'ensemble du problème. Une partie significative a produit une copie de bon niveau. Enfin, l'étalonnage des notes est satisfaisant. Les correcteurs déplorent cependant un contingent assez fort de copies presque vides et une quantité surprenante de copies superficielles, qui donnent à beaucoup de questions des réponses sans aucun contenu.

Conseils aux futurs candidats

Comme d'habitude, ce sujet récompensait le travail du cours. Certaines questions de probabilités, a priori simples, ont mis en évidence un travail insuffisant de ce chapitre. Le caractère assez technique de l'épreuve a valorisé les candidats solides. Nous incitons les candidats à apprendre leur cours de manière réfléchie et à ne pas manipuler aveuglément les objets mathématiques.

D'un point de vue plus technique, on souligne les points suivants.

- Les premières questions d'un problème sont souvent simples. C'était le cas ici. Il importe de ne pas se précipiter et de les rédiger correctement.
- Les probabilités appellent une rédaction aussi précise que les autres parties des mathématiques ; les justifications doivent s'appuyer sur des arguments précis.
- Les bases de l'analyse (majorations, estimations asymptotiques) sont au cœur d'une grande part des mathématiques ; on ne les acquiert que par une pratique assidue du calcul. Beaucoup de candidats en ont seulement une faible maîtrise.

Analyse détaillée des questions

Question 1. Les réponses s'appuient majoritairement sur la règle de d'Alembert, qui est en effet applicable. En revanche, les simplifications des quotients de factorielles sont assez souvent fausses. Les réponses à base de croissance comparée, dont le principe est évidemment correct, sont rarement assez précises.

Question 2. Le développement en série entière de l'exponentielle est le plus souvent connu, celui du cosinus hyperbolique un peu moins. Mais bon nombre de candidats oublient que les séries considérées n'ont pas de terme d'indice 0.

Question 3. Question proche du cours, rarement bien traitée. Une moitié des candidats donnent une réponse correcte, mais la plupart oublient de vérifier l'absolue convergence, nécessaire pour appliquer le théorème de transfert.

Question 4. Espérance et variance sont le plus souvent connues ; quelques candidats perdent du temps à les redémontrer. En revanche, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev n'est pas toujours bien énoncée, et l'application n'est vraiment bien faite que dans un tiers des copies.

Question 5. Pour la première partie de la question, beaucoup de candidats évoquent l'inégalité de Markov, mais peu l'appliquent bien. Il faut d'une part choisir la bonne variable aléatoire (Z_x^r), d'autre part vérifier l'égalité d'événements, enfin mentionner la positivité de Z_x^r et celle de $1-x^{-1/3}$. L'oubli de ces précisions obérait fortement la note attribuée. La seconde partie de la question est souvent l'objet de tentatives de bluff.

Question 6. Bilan très décevant pour cette question simple. Beaucoup des candidats décrètent les variables aléatoires $X_x - i$ indépendantes, ou utilisent une version fantaisiste de la linéarité de l'espérance. Certains affirment qu'une constante est d'espérance nulle. Ce type de passage en force témoigne à tout le moins d'un grand manque de rigueur et n'incite pas le correcteur à l'indulgence pour la suite de la copie.

Question 7. Résultat très inégal pour la première partie de la question. Un nombre significatif de candidats voit qu'il s'agit essentiellement de décomposer un polynôme sur une base. La seconde partie est assez largement réussie.

Question 8. Un taux de réponse assez décevant pour la première partie de la question. La seconde est mieux traitée.

Question 9. Question testant la compréhension du sujet, dans laquelle il s'agit de combiner correctement certains des résultats précédent, réussie par une partie appréciable des candidats.

Question 10. La première partie de la question a été très souvent abordée, mais les calculs ont parfois été fantaisistes. Dans certaines copies, la dérivée d'un produit est le produit des dérivées. Dans d'autres, le tableau de variation est faux. Il semble que la présence d'un paramètre ait souvent posé problème, ce qui est étonnant à ce niveau d'études ; pas mal de copies contiennent d'ailleurs des inégalités fausses ($r > 0$ *donc* $1 - r > 1$ ...). La seconde partie, bien traitée dans un nombre convenable de copies, a parfois donné lieu à des réponses non argumentées.

Question 11. La première partie, qui n'est qu'un développement limité simple, a reçu très peu de réponses correctes. La suite, délicate, a été peu abordée et n'a presque jamais donné lieu à des réponses valables.

Question 12. Beaucoup d'erreurs dans les calculs asymptotiques, du type :« $\lfloor x \rfloor$ est équivalent à $\lfloor x \rfloor+k$, donc $\lfloor x \rfloor!$ est équivalent à $(\lfloor x \rfloor+k)!$ ». Les réponses utilisant la formule de Stirling ont rarement été convaincantes ; cette méthode est ici (comme pour Q1) assez maladroite.

Question 13. Pour la première partie, beaucoup de candidats donnent des réponses fausses, en invoquant la décroissance de la suite, qui contredit pourtant le résultat de Q10 !

Question 14. Cette question n'a été bien traitée que dans peu de copies.

Question 15. Cette question, souvent abordée, a été bien traitée dans une petite moitié des copies.

Questions 16 et17. Les calculs assez subtils de ces questions ont été abordés dans quelques excellentes copies. Quelques candidats ont par ailleurs grappillé des points sur les conclusions, qui étaient très simples.

Question 18. Question souvent abordée, mais rarement traitée dans son intégralité. La relation de récurrence est en général obtenue, l'expression de c_n ne suit pas toujours. La justification des calculs (dérivation d'une série entière sur l'inter- valle ouvert de convergence) est rarement mentionnée.

Question 19. Il s'agissait d'appliquer la formule de Stirling. Une partie des candidats l'a vu et a cité correctement la formule. Plus rares sont ceux qui ont mené la question à son terme.

Question 20. Cette ultime question n'était pas difficile pour qui avait compris la logique du texte ; elle a reçu quelques bonnes réponses.

1.5. Mathématiques II — PC

Le sujet de la deuxième épreuve PC était consacré à l'étude d'une somme de série de fonctions, que Riemann aurait proposée, dans les années 1860, comme exemple de fonction partout continue et nulle part dérivable. En réalité, les travaux de Hardy (1916) et de Gerver (1968) ont permis de montrer que la fonction R de l'énoncé est dérivable exactement en les réels de la forme πr, où r est un rationnel à numérateur et dénominateur tous deux impairs.

L'énoncé se limitait à montrer la non-dérivabilité de R en 0 par des moyens élémentaires, et sa dérivabilité en π par une méthode basée sur l'utilisation de la formule sommatoire de Poisson. Il avait été conçu :