Composition de Mathématiques – B, Filière MP (X)

Présentation du sujet

Le sujet portait sur l'étude d'un problème de Dirichlet mettant en jeu une équation différentielle non linéaire de type Hamilton-Jacobi dans le régime stationnaire :

$$\begin{cases} u(x) + |u'(x)| = 0 & \text{pour tout } x \in [-1; 1] \\ u(-1) = u(1) = -1. \end{cases} \tag{1}$$

Remarquons tout d'abord que ce type de problème ne relève pas du théorème d'existence et d'unicité de Cauchy global. Le sujet montre d'ailleurs que ce problème n'a pas de solution au sens classique. En revanche on peut en construire une sur-solution et une sous-solution.

Afin d'étudier le problème (1), le sujet introduit les notions de sur et de sous-différentiel d'une fonction d'une variable réelle. Nous pourrions dire sous-dérivée, puisque nous considérons des fonctions à une variable mais ce terme ne semble pas usité dans la littérature. Etant donné une fonction continue u définie sur un intervalle ouvert I et un point x_0 dans I, on définit $D^+u(x_0)$ comme l'ensemble des $\varphi'(x_0)$ pour φ fonction C^1 telle que $u-\varphi$ admet un maximum local en x_0. Cette notion généralise celle de nombre dérivé dans le sens où, si est dérivable en x_0 alors $D^+u(x_0) = \{u'(x_0)\}$. Lorsque u est concave, $D^+u(x_0)$est l'intervalle fermé dont les bornes sont les dérivées à gauche et à droite en x_0. En général, $D^+u(x_0)$ est un intervalle fermé éventuellement vide.

La partie I montrait que l'équation (1) n'a pas de solution de classe C^1. On y donne aussi deux fonctions continues qui vérifient l'équation sauf en $x = 0$. Cette partie a été bien réussie par la majorité des candidats, hormis la question 1b. Cette question permettait de repérer très tôt les candidats qui, bien souvent, sont allés loin dans le sujet.

La partie II établit plusieurs résultats fondamentaux sur le sur-différentiel des fonctions continues :

- Si u est dérivable en x_0 alors $D^+u(x_0) = \{u'(x_0)\}$.
- L'ensemble des points x_0 pour lesquels $D^+u(x_0)$ non vide et dense.
- L'ensemble $D^+u(x_0)$ admet une caractérisation en terme de limite sup. de taux de variation.
- L'ensemble $D^+u(x_0)$ est un intervalle fermé.
- Si u est concave alors $D^+u(x_0)$ est l'ensemble des pentes des droites passant par $(x_0, u(x_0))$ et situées en dessous du graphe de u. Ainsi, dans la définition de $D^+u(x_0)$, il suffit de considérer des fonctions φ affines.

Si le début de la partie a été plutôt traité, (hormis la question 5b), la question 7 marque un coup d'arrêt pour la plupart des candidats. C'est en effet à partir de là qu'une majorité des candidats se contentent de sauter toutes les questions difficiles pour tenter d'aller "grapiller" des points sur les quelques questions élémentaires restantes.

La partie III définit les notions de sur et sous-solution pour une équation différentielle. On montre, sous certaines hypothèses de régularité de l'équation que, si u est une sous-solution et v une sur-solution, alors l'hypothèse $u \leq v$ aux bornes de l'intervalle implique cette inégalité sur tout l'intervalle. Ce résultat permet dans la partie suivante de montrer que, pour le problème de Dirichlet (1), il existe au plus une fonction u_0 qui est à la fois sur et sous-solution.

La partie IV revient sur l'exemple du problème de Dirichlet (1) et on y démontre que u_0 introduite à la question 3 en est l'unique sur et sous-solution pour le hamiltonien $|p|$. Puis, en perturbant le problème (1) on introduit un problème de Dirichlet d'ordre 2 qui lui possède une unique solution de classe C^2 sur $[-1,1]$. Cette unique solution dépend d'un petit paramètre de perturbation et elle converge uniformément vers $-u_0$ lorsque ce paramètre tend vers 0.

Conseils généraux pour les candidates et candidats

Le sujet de l'épreuve de Mathématiques - B de cette année portait essentiellement sur des points du programme de MPSI et en particulier sur les notions de continuité, de dérivée, de borne supérieure et de limite monotone. Le traitement du sujet nécessitait de manipuler avec soin ces notions. En particulier, il a révélé des lacunes importantes chez certains candidats :

— On ne dérive pas par rapport à une constante. Bien entendu, aucun candidat ne l'écrirait ainsi, mais beaucoup écrivent : "Soit y tel que $u'(y) > 0$. Alors $u'(y) = |u'(y)| = -u(y)$. En dérivant (par rapport à y qui est fixé ?) on obtient $u''(y) = -u'(y)$". Bien entendu, il fallait d'abord justifier que ces calculs peuvent se faire au voisinage de y et pas seulement au point y.

— On n'écrit pas de limite avant d'avoir prouvé son existence. Cette erreur, pourtant classique apparaissait souvent dans les questions 1b, 5b, 7a...

— Lorsqu'on multiplie (ou divise) une inégalité par une constante, il faut veiller au signe de celle-ci.

— Une fonction bornée ne converge pas forcément. En particulier, le contraire de converger n'est pas tendre vers l'infini.

— Le sup n'est pas linéaire.

Toutes ces erreurs montrent de la part de trop nombreux candidats des bases en analyse réelle bien fragiles. Ces notions sont pourtant abordées dès la première année de CPGE en MPSI, et plus d'un an après, elles devraient être assimilées par les candidats.

Une autre erreur que l'on rencontre trop souvent est le fait de ne pas démontrer une égalité d'ensembles par double inclusion ou une équivalence par double implication. La question 4 en est un parfait exemple : la raison pour laquelle $D^+u(x_0)$ est inclus dans le singleton $\{u'(x_0)\}$ n'est pas la même que celle pour laquelle ce singleton est inclus dans $D^+u(x_0)$. Pour une telle question, il est indispensable de raisonner par double inclusion.

Comme chaque année, il était préférable de s'attacher à traiter correctement plusieurs questions consécutives et parmi elles des questions plus difficiles, plutôt que d'essayer de survoler toutes les parties et de tenter de "grappiller" des points sur les questions les plus faciles. Le barème est établi de sorte qu'une telle stratégie est forcément vouée à l'échec. A l'opposé, passer du temps pour, par exemple, réussir à traiter correctement une question comme la 7a, donnait la clé pour réussir les questions suivantes de la Partie II et s'assurer un nombre de points suffisant pour atteindre une note bien supérieure à 12/20, note qui sépare les 400 premiers candidats des autres. Il est par contre tout à fait autorisé de sauter une question que l'on ne parviendrait pas à résoudre, puis d'en utiliser le résultat plus tard. Il faut alors veiller à ne pas oublier de vérifier toutes les hypothèses requises pour appliquer ces "boîtes noires".

Le soin apporté aux copies pose toujours problème. Il reste encore trop de candidats qui ne mettent pas en avant, dans la rédaction de leurs réponses, les arguments clés de la démonstration et qui présentent dans leur copie des calculs ou des raisonnements qui n'aboutissent pas. Nous devons donc encore une fois rappeler aux candidats que l'usage d'un brouillon est indispensable afin de ne présenter sur sa copie que les étapes essentielles d'un raisonnement ou d'un calcul et de ne pas y faire figurer des arguments faux ou trop incomplets.

Il est aussi demandé aux candidats une lecture plus attentive des énoncés et des questions posées. Certains candidats ne répondent qu'à la "moitié" de la question posée sans dire un seul mot à propos du reste. Préciser que l'on admet le résultat correspondant au reste de la question facilite la lecture des correcteurs. De même, les phrases du type "et à partir de là il est facile de voir que..." alors que justement, le point délicat reste à traiter, n'apportent pas de points. Il est inutile de compter sur un manque de vigilance de la part du correcteur.

Enfin, la lisibilité des copies peut parfois poser un réel problème aux correcteurs. Nous rencontrons encore trop de copies remplies de râtures et/ou parfaitement illisibles du fait d'une graphie microscopique ou indéchiffrable. Dans les cas où malgré tous nos efforts de déchiffrage, certaines parties du texte restent incompréhensibles pour le correcteur, dans le doute, les points ne sont pas attribués. Dans l'autre sens, il est évident qu'une copie bien présentée met le correcteur dans de bien meilleures dispositions au moment d'attribuer des points à une question.

Indications sur le barème et statistiques générales

Les résultats de l'épreuve sont en accord avec les directives statistiques générales du concours, ce qui garantit l'influence respective des différentes épreuves.

Nombre de copies :	1960
Note moyenne :	8.75
Écart-type :	3.90
Coefficient de variation :	44.6%

L'histogramme de répartition des notes est représenté sur la figure 1. L'histogramme cumule les candidats français et étrangers.

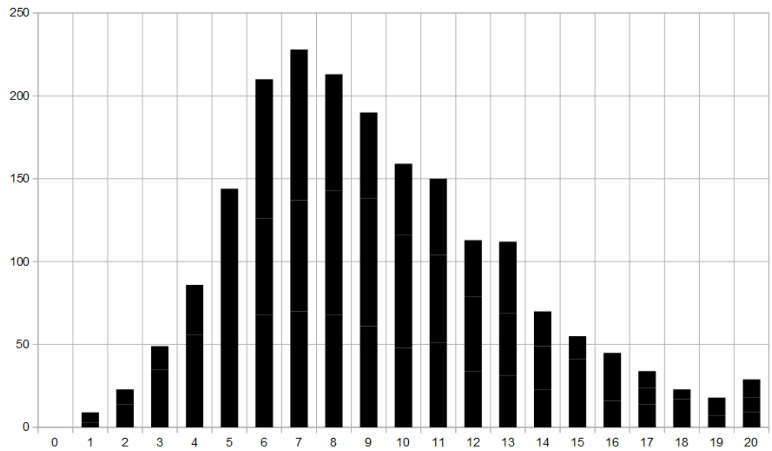

Fig.1 – En abscisse la note et en ordonnée le nombre de candidats ayant obtenu cette note.

Les notes des candidats français se répartissent selon le tableau suivant :

$0 \leq \text{N} \leq 4$	90	5.95 %
$4 < \text{N} \leq 8$	572	37.83 %
$8 < \text{N} \leq 12$	509	33.66 %
$12 < \text{N} \leq 16$	245	16.20 %
$16 < \text{N} \leq 20$	96	6.35 %
Total :	1512	100%

Nombre de candidats :	1512
Note moyenne :	9.12
Écart-type :	3.91

Comme chaque année, le barème a été conçu selon trois objectifs : séparer les candidats dans la zone d'admissibilité, éviter les effets de seuil et minimiser les points de "grappillage".

Le tableau suivant indique la proportion de points attribués à chaque partie.

	Proportion dans le barème	Barème cumulé	Note sur 20 cumulée
Partie I	10%	10%	4.2
Partie II	47%	57%	19.7
Partie III	24%	71%	20
Partie IV	19%	100%	20

En pratique il était possible d'atteindre une note de 12/20 en répondant correctement à toutes les questions jusqu'à la 6b incluse puis en traitant les questions plus simples 10a, 11a et 11b, 13, 14a ou 16a et 16b. Les questions 1b et 5b, peu réussies, étaient récompensées par plus de points que les autres du début du sujet. Cette note de 12/20 sépare les 400 premiers candidats des autres.

Examen détaillé des questions

Ce qui suit n'est pas un corrigé de l'épreuve mais des commentaires question par question.

Partie I

Question 1a Cette question a été traitée correctement par 75% des candidats. Environ 15% ont su montrer soit le caractère C^2 soit donner l'expression de la dérivée seconde en fonction de la dérivée première. Pour bien résoudre cette question, il fallait utiliser le fait qu'une fonction non nulle en un point et continue est de signe constant au voisinage de ce point.

Question 1b Etonnamment, cette question n'a été bien traitée que par 25% des candidats. Soit u une fonction C^1 et y tel que $u'(y) = 0$. Il n'est pas vrai que l'on a l'alternative suivante

— Il existe un voisinage de y sur lequel u' est identiquement nulle, OU

— Il existe un voisinage de y sur lequel y est le seul zéro de u'.

Certains candidats raffinent cet énoncé en se plaçant tour à tour à gauche et à droite de y. Dans tous les cas la fonction

$$0 \longmapsto 0, \quad x \neq 0 \longmapsto x^2 \sin(\frac{1}{x})$$

n'est dans aucune de ces catégories. L'écueil rencontré est celui du cas où y est un zéro non isolé pour la fonction u'. On ne pouvait donc pas utiliser la question 1a et un argument de prolongement dérivable.

Il s'agissait simplement d'utiliser la définition de la dérivée comme limite du taux de variation en y et d'utiliser l'équation vérifiée par u et u' pour relier le taux de variation de u' à celui de u.

Question 2 Cette question contenait plusieurs parties. La plupart des candidats sont parvenus à justifier l'équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par u puis en la résolvant à obtenir une contradiction à l'aide des valeurs de u aux bords de l'intervalle $[-1, 1]$. Par contre le caractère C^2 a été plus problématique car il ne relevait toujours pas d'un argument de prolongement C^2 mais plus simplement de l'utilisation du lien entre u'' et u ou entre u'' et $|u'|$ obtenu en tout point de $[-1, 1]$ aux questions 1a et 1b.

Question 3 Il s'agit d'une question facile de calcul direct, réussie par 86% des candidats auxquels s'ajoute 11% de candidats ayant oublié de justifier la continuité.

Partie II

Question 4 Cette question a été bien traitée par 60 % des candidats. Environ 25% de candidats ont bien traité l'une des deux inclusions mais oublient de traiter l'autre. Ces candidats ont pour la plupart voulu raisonner par équivalence et font l'erreur de penser que la condition d'annulation de la dérivée en un extremum est une condition nécessaire et suffisante alors qu'elle n'est bien entendu que nécessaire. Pour obtenir l'autre inclusion il suffisait d'utiliser u de classe C^1 comme fonction φ. Il était inutile d'aller chercher des exemples plus compliqués.

Question 5a Cette question a été bien traitée par près de 75% des candidats. La plupart utilisent bien les différentes manières de dire que l'intersection de deux voisinages est un voisinage.

Question 5b Cette question, plus subtile dans sa rédaction qu'elle n'en a l'air, n'a été réussie que par 20% des candidats. La principale erreur constatée est un mauvais emploi du théorème des gendarmes. En effet, encadrer le taux de variation par deux quantités qui convergent ne suffit pas à prouver que ce taux converge, du moins pas avant d'avoir démontré que les deux quantités encadrantes convergent vers la même limite. Comme nous l'avons déjà évoqué précedemment, une fonction ou une suite bornée ne converge pas forcément, le contraire de converger n'est pas de tendre vers l'infini.

Question 6a Dans cette question, il suffisait d'étudier les limites aux bords de la fonction proposée puis d'utiliser la continuité de u pour obtenir que $u - \varphi_{x_0,r}$ tendait vers $-\infty$ en 1 et -1. D'où par continuité, l'existence d'un maximum global, donc local, pour cette fonction. Cette question, pourtant relativement simple relevant d'une étude de fonction et d'un argument classique sur les fonctions continues sur un compact n'a été réussie que par 28% des candidats.

Question 6b Il s'agit là d'une simple reformulation du résultat de la question précédente, ce que 62% des candidats ont vu. Il n'était pas forcément nécessaire de passer par les suites pour démontrer la densité, la définition comme ensemble dont l'intercection avec tout ouvert de $[-1, 1]$ est non vide étant ce qui était démontré à la question précédente.

Question 7a A partir de cette question, la difficulté du sujet franchi un palier. Il s'agissait de montrer tout d'abord une estimation de la forme :

$$\forall \delta > 0 \quad \exists \varepsilon > 0, \ \sup_{\varepsilon} \leq \delta$$

donc pour cela démontrer que la quantité sans le sup est majorée uniformément par δ sur l'intervalle $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \cap [-1, 1]$. Cette majoration uniforme a été obtenue par environ 15% des candidats. Il convenait ensuite de justifier, par monotonie par rapport à ε, l'existence de la limite. Avec cet argument supplémentaire, le taux de réussite à cette question tombe à 6% des candidats.

Question 7b Si l'inégalité demandée a été relativement bien réussie par près des deux tiers des candidats (il fallait prendre garde à séparer le cas où $x = x_0$ pour ne pas diviser par 0), seuls 20% des candidats sont parvenus à justifier proprement le caractère bien défini du réel $\varphi(r)$. Une erreur vue dans près d'un tiers des copies est d'écrire que l'inégalité (3) du sujet implique qu'il existe un ε petit tel que le sup soit négatif. Avec une limite nulle on ne peut que affirmer que pour tout réel $\eta > 0$, ce sup est plus petit que η pour un ε assez petit. On pouvait par exemple fixer $\eta = 1$ pour obtenir un tel ε_0 puis hors de $]x_0 - \varepsilon_0, x_0 + \varepsilon_0[\cap[-1, 1]$ on pouvait utiliser la continuité du quotient sur un compact (réunion de deux intervalles fermés bornés) pour montrer le caractère fini du sup considéré dans la définition de $\varphi(r)$.

Question 7c Montrer la continuité de φ nécessite une manipulation minutieuse des sup et n'est absolument pas évidente. Ce type de résultat n'étant pas au programme, il s'agissait de le montrer à la main, en utilisant la définition d'une borne supérieure ainsi que la définition de la continuité du quotient dont on prend le sup. Cette question n'a été bien traitée que par 4% des étudiants.

Question 7d Cette question est une conséquence de la positivité et de la croissance de φ. Relativement simple, elle a été réussie par 30% des candidats.

Question 7e Sur cette question, 20% donnent une réponse partielle et 8% une réponse complète. Pour une première inclusion, il fallait utiliser la question précédente et revenir à la définition du sur-différentiel en justifiant bien que $x \mapsto \rho(|x - x_0|)$ est de classe C^1 car $\rho'(0) = 0$. L'autre inclusion est donnée par la question 7a.

Question 8 La démonstration de la question 4 ne peut s'utiliser que pour une inclusion, l'autre inclusion se démontrant autrement car u, n'étant plus C^1, ne peut être prise comme choix de fonction φ. Pour l'autre inclusion, il faut utiliser la question 7e. Seuls 11% des candidats y sont parvenus, auxquels se rajoutent 16% ayant bien traité une inclusion seulement.

Question 9 Pour démontrer que c'est un intervalle, deux approches sont possibles : directement par la définition ou en utilisant la question 7e. Dans les deux cas il s'agissait de montrer que $D^+u(x_0)$ est un ensemble convexe de $\mathbf{R}$. 17% des candidats sont parvenus à démontrer cette convexité.

Le caractère fermé est beaucoup plus difficile car, en utilisant la caractérisation séquentielle, il exige d'obtenir une estimation uniforme pour pouvoir passer à la limite dans le sup apparaissant à la question 7e. Là, une approche directe par la définition devenait beaucoup trop compliquée à mettre en oeuvre. Attention aussi à toutes les démonstrations du type : "il s'agit de l'image réciproque par une fonction continue d'un intervalle fermé de $\mathbf{R}$", la continuité de la fonction en question n'étant presque jamais justifiée (nous l'avons vue une seule fois bien rédigée...). Seuls 3% des candidats sont parvenus à traiter intégralement cette question.

Question 10a Il s'agit d'une question de cours. Toutefois, si l'on voulait appliquer le lemme des trois pentes, il fallait alors bien séparer les trois cas possibles suivant la position de x_0 par rapport à y_1 et y_2. La moitié des candidats a donné un argument complet permettant d'obtenir la totalité des points à cette question.

Question 10b L'existence des limites, démontrée par 25% des candidats, est soit un résultat du cours sur les fonctions concaves, soit une utilisation des limites monotones. Il convenait ensuite de justifier que lorsque la limite existe elle est égale à la limite supérieure pour appliquer 7e puis la question 9. Cela n'a été bien rédigé que par 6% des candidats.

Question 10c L'égalité des ensembles s'obtenait par double inclusion en utilisant les propriétés des fonctions concaves et la décroissance des pentes. L'équivalence demandée s'obtenait alors directement en utilisant $p = 0$.

Partie III

Question 11a Attention à la rédaction trop hâtive de certains candidats sur cette question. Il s'agit de démontrer un résultat du type $\forall p \in D^+u(x_0)$ et non pas du type $\forall x \in [-1, 1]$. Au final, cette question pourtant élémentaire n'a été bien rédigée que par 53% des candidats.

Question 11b Cette question, similaire à la précédente, ne présentait pas de "piège" à la rédaction. Elle a été un peu mieux réussie que la précédente avec un taux de réussite de 59%.

Question 12 Il s'agit d'utiliser le fait qu'une fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes, en n'oubliant pas de justifier qu'ici le maximum est atteint à l'intérieur de l'intervalle $[-1, 1]$ du fait des hypothèses faites sur u et v aux bords. La suite de la question est une application technique du théorème de Heine sur l'uniforme continuité. Près de 10% des candidats l'ont bien traitée.

Question 13 Encore une fois, on utilise le fait qu'une fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes (argument donné par 27% des candidats) puis on utilise la définition de M. 15% des candidats ont réussi cette question.

Question 14a C'est une conséquence immédiate de la question 13 en écrivant l'expression de Φ_η. 17% des candidats ont réussi cette question.

Question 14b Il s'agissait de faire un raisonnement par l'absurde et d'utiliser la question 14a pour pouvoir appliquer la première inégalité de la question 12 et aboutir à une contradiction en utilisant les hypothèses faites sur u et v aux bords de $[-1,1]$. Seuls 2% des candidats sont parvenus à traiter correctement cette question.

Question 14c L'énoncé fournissait des fonctions test φ sous la forme de polynômes de degré 2 en utilisant la forme de Φ_η et en fixant $x = x_\eta$ ou $y = y_\eta$. Moins d'une dizaine de candidats sont parvenus à traiter cette question.

Question 15 Il s'agit là d'une question de synthèse utilisant 14c, l'hypothèse (4) faite sur H ainsi que la question 12. Elle a été bien faite par les rarissimes candidats étant arrivés là (moins de 1%). Toutefois, 5% des candidats ont admis l'inégalité demandée et on obtenu alors la contradiction voulue.

Partie IV

Question 16a Réussie par 17% des candidats, il s'agit juste d'utiliser la question 4 puisque u_0 est C^1 en dehors de 0.

Question 16b Le caractère concave de u_0 n'était pas évident car, u_0 n'étant pas dérivable en 0, on ne peut utiliser directement les critères sur la monotonie de la dérivée ou sur le signe de la dérivée seconde. Une fois la concavité obtenue, il s'agissait d'appliquer la question 10b pour le sur-différentiel et la question 7e pour le sous-différentiel. Seuls 2% des candidats ont réussi à traiter tous ces points.

Question 16c Hors de 0 c'est le calcul effectué à la question 3, en 0 il faut vérifier la définition de sur et de sous-solution à la main, le cas “sur-solution” étant trivial car $D^-u_0(0) = \emptyset$. Il y a tout de même 13% des candidats qui sont parvenus à traiter cette question au moins partiellement.

Question 16d Il fallait démontrer que u_1 est encore sous-solution mais n'est pas sur-solution, ce qui n'a été fait que par 1% des candidats.

Question 16e Pour démontrer l'unicité, comme toujours on se donne une autre fonction qui vérifie les hypothèses requises et on montre qu'elle est égale à u_0 par double inégalité en utilisant le résultat obtenu à la Partie III. Le taux de réussite est là encore de 1%.

Question 17 Il faut tout d'abord utiliser le théorème de prolongement C^1 puis C^2 en 0 puis effectuer une vérification directe par le calcul. Le prolongement en 0 a été obtenu par 2% des candidats, le calcul n'a été fait que par une poignée de candidats.

Question 18a En supposant qu'il y ait deux fonctions distinctes solutions, on pouvait justifier que le maximum de leur différence était strictement positif (en faisant un choix de signe). Puis en utilisant la caractérisation du maximum pour les fonctions de classe C^2, et en réinjectant dans l'équation, on obtenait une contradiction. Cette question n'a été réussie par aucun candidat.

Question 18b Cette ultime question reposait entièrement sur le fait que $\lambda^+_{\varepsilon_n}$ tend vers 1 en $+\infty$ et $\lambda^-_{\varepsilon_n}$ tend vers $-\infty$. Cela permettait d'obtenir la limite simple de la suite de fonctions. Le caractère uniforme demandait bien plus de travail avec des estimations précises utilisant les inégalités classiques sur l'exponentielle. Cette question n'a été partiellement traitée que par deux candidats.