1/ Présentation du sujet

Ce sujet proposait deux exercices et un problème. Le premier exercice demandait de rechercher un projeté orthogonal afin de calculer une distance. Il permettait de juger de l'habileté à mener des calculs. Le deuxième exercice de probabilité était composé d'une question de cours et d'une application sur un exemple d'approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson. Le problème étudiait, à travers divers exemples, la réduction de certaines matrices par blocs et terminait par quelques applications.

2/ Appréciation générale

Le sujet aborde trois parties distinctes du programme, le niveau de difficulté est très proche du cours. Le sujet était progressif et alternait des parties plus théoriques et plus calculatoires. Ceci fournit une classification des résultats :

- les plus faibles ont traité les parties calculatoires mais n'ont pas compris le principe du produit matriciel par bloc,
- les copies dans la moyenne ont 'attaqué' en partie les questions théoriques et sont notamment restés bloquées à la question 15 plus difficile,
- les meilleures copies ont traité le sujet de manière raisonnable en totalité.

On notera que les polynômes d'endomorphisme ne sont pas maîtrisés par certains candidats et qu'il est regrettable que l'exercice de probabilité, pourtant simple, soit si peu traité.
Ce sujet a permis de bien trier les candidats, la moyenne est de 10,03 et l'écart-type de 4,18.
L'attention des candidats est attirée sur le fait que les textes des sujets de mathématiques nécessitent une connaissance très précise des points fondamentaux du cours.

Sont ainsi valorisés :

- l'apprentissage du cours et en particulier les démonstrations des points importants, les exercices et exemples de base ;
- les qualités de rigueur et de clarté d'exposition que l'on peut attendre d'un futur ingénieur ;
- le soin apporté à la présentation de son travail.

Un candidat de niveau moyen et ayant travaillé doit pouvoir obtenir, a minima, la moyenne.

3/ Erreurs courantes

- On rencontre des composées d'équivalents.
- Oublis d'hypothèses pour le caractère défini du produit scalaire.
- On rencontre des noyaux de polynômes : Ker(P).
- Confusion entre un polynôme annulateur et le polynôme caractéristique.
- Formule de calcul de déterminant par blocs utilisée même lorsqu'aucun des blocs hors diagonale n'est nul.
- L'anneau des matrices carrées est parfois considéré comme intègre.

- On rencontre encore l'erreur : « une matrice est diagonalisable, si et seulement si, le polynôme caractéristique est scindé à racines simples ».
- Utilisation d'expressions qui n'ont aucun sens, notamment multiplication d'une matrice 2x2 par une matrice 4x4, produits de vecteurs (exemple $P(u(x))$).
- Difficultés à déterminer l'inverse d'une matrice, même en dimension 2.
- Confusions entre matrices semblables et matrices équivalentes.
- Exemple : matrices qui ont même rang sont semblables.

4/ Remarques détaillées

Q1. Cette première question semble accessible à tous et effectivement, beaucoup la traitent parfaitement bien. Certains pourtant, oublient des hypothèses, notamment pour la linéarité où seule la multiplication par un scalaire est présente. L'oubli le plus fréquent est quand-même la définie positivité et, si elle est énoncée, elle n'est pas toujours vérifiée (il manque parfois l'argument de positivité, mais le plus souvent, celui de continuité).

Q2. Beaucoup réagissent mécaniquement et démarrent sur Gram-Schmidt sans voir que la famille proposée est déjà orthogonale – certains semblent d'ailleurs ne jamais s'en apercevoir.

Q3. La confusion la plus usuelle est ici d'écrire que la projection sur F, c'est $(w|u)u+(w|v)v$, alors que u et v ne sont pas unitaires.
Pour la fin de la question, beaucoup ont reconnu qu'il s'agissait du carré de la distance de w à F. Il y en a bien moins qui ont écrit que c'était la norme au carré de w moins sa projection sur F et peu ont alors pensé à utiliser Pythagore.
Peu parviennent au résultat exact sans erreur de calcul. Le candidat doit savoir mener à terme des calculs et bien se relire.
Il y a quelques erreurs sur la projection orthogonale qu'un simple schéma (trop rarement fait) aurait permis d'éviter.

Q4. Beaucoup de candidats n'ont pas vu la simplicité de la limite préliminaire et ont employé des méthodes compliquées : Stirling, récurrence… Pour la seconde limite, beaucoup de candidats ont composé des équivalents.

Q5. Confusion entre loi de Bernoulli et loi binomiale.

Q6. La vérification des 3 conditions de l'approximation est rarement présente, mais l'expression de la probabilité à calculer est souvent juste. Hélas, la valeur résultant du calcul est parfois surprenante en raison de nombreuses étourderies (par exemple le carré de 0,6 qui serait 1,2... ainsi que des erreurs de virgule).

Q7. On voit une confusion entre polynômes minimal et caractéristique. Les candidats qui citent Cayley-Hamilton n'ont pas bien lu le texte et croient que les valeurs propres λi sont répétées selon leur multiplicité. Certains préfèrent se replier sur une solution matricielle, généralement satisfaisante.

Q8. Des problèmes de notations avec les polynômes d'endomorphismes. On déplore un manque global de conclusion correcte de la part des candidats après l'utilisation du lemme des noyaux.

Q9. Il est extrêmement surprenant de constater que beaucoup de candidats sont incapables de trouver l'inverse d'une matrice 2x2…

Q10. Beaucoup de grosses erreurs pour l'inversibilité de Q et le calcul de l'inverse. On voit beaucoup de det(Q) = det(A)det(D) - det(B)det(C) pour une matrice par blocs. L'inverse est calculé façon 2*2 avec la comatrice. Peu vérifient finalement que Q est inversible en faisant le produit.

Q11. Cette question est aussi l'une des mieux réussies, même si le résultat n'est pas fourni. Attention toutefois à ceux qui permutent les matrices alors qu'elles ne commutent pas : ils n'ont pas l'air étonnés de retrouver B !! La conclusion de diagonalisabilité est présente dans la plupart des copies, mais plus ou moins bien justifiée.

Q12. Le calcul de T(A) a posé des problèmes aux candidats les plus faibles. La conclusion n'a pas toujours été très argumentée.

Q13. Si la condition pour triangulariser est bien citée, le calcul explicite est beaucoup plus difficile malgré l'aide de l'énoncé.

Q14. Cette question ressemble étrangement à la question 11 et beaucoup d'élèves s'en sont aperçu. Petit inconvénient : elle est souvent faite avec moins de soin…

Q15. Question peu réussie.

Q16. Certainement la question la plus difficile pour la majorité des candidats, peu de réussite avec des raisonnements non aboutis.

Q17. Ceux qui n'ont pas perdu le fil et tout suivi jusqu'ici, n'ont pas de mal à donner la condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité ; il ne faut cependant pas oublier la réciproque, même si elle est évidente.

Q18. Réussie par un grand nombre de candidats.

Q19. De très bonnes réponses ici, diverses et variées. Les élèves ont compris qu'il fallait avoir un polynôme caractéristique non scindé et, comme c'est un polynôme de degré 2, il faut obtenir un discriminant strictement négatif. Malheureusement, chez certains candidats, la matrice exhibée ne convient pas du tout, étant parfois même diagonalisable comme la matrice nulle ou bien des matrices symétriques réelles.

Q20. Beaucoup parviennent à diagonaliser et comprennent le lien avec les parties précédentes. Par contre, la recherche des *sev* stables n'a pas beaucoup été réussie. En particulier, les étudiants qui comprennent le lien entre *sev* stables et matrices par blocs, ne pensent pas à regarder la matrice de passage *P* pour déterminer les vecteurs engendrant les *sev* stables.

Q21. Beaucoup plus de candidats parviennent à traiter cet exemple que le précédent, la tâche étant ici facilitée par le fait que la matrice A est déjà diagonale.

Q22. Peu citent la forme des solutions dans le cas où M est diagonalisable. La plupart repassent par un changement de base à un système diagonal, qu'ils résolvent pour ensuite appliquer la matrice de passage. Dans cette question, on demandait de donner les solutions sans détailler les calculs et pourtant certains ont quand même fait les calculs.

Q23. Réussie par quelques étudiants, qui font le lien avec le système différentiel et les conditions initiales. Les candidats à la recherche de points partent du développement de l'exponentielle. Pourtant, l'énoncé exigeait une solution à partir des questions précédentes…