- Δ est compact : en tant qu'image continue de G par l'application continue (car polynomiale en les composantes de A) qui à A associe $A^T A$, c'était plutôt simple.
- Δ est contenu dans S_n^{++} : c'est une conséquence évidente de la question 2.
- K est compact : c'est une conséquence évidente de la question 4.
- K est contenu dans S_n^{++} : cela résulte de la convexité de S_n^{++}.
- K est stable par tous les éléments de H : un certain nombre de candidats ont établi cette propriété pour Δ et non pour K. Il suffisait alors de prendre une combinaison linéaire d'éléments de Δ – soit en nombre quelconque, soit de n^2+1 éléments au vu de la dimension de $\mathrm{M_n}(\mathbb{R})$ – pour conclure aisément.

Q 21. La première partie de la question résultait directement de la question 18, dont il fallait simplement vérifier que H et K satisfaisaient les hypothèses. La question 2 permettait alors de construire la matrice N, ce que la plupart des candidats qui ont traité cette question ont vu. Par contre, bien peu ont pensé à démontrer que G_1 constitue un sous-groupe de $\mathrm{O_n}(\mathbb{R})$, ce qu'ils pouvaient soit faire directement, soit déduire du fait que l'application qui à A associe $N^{-1}AN$ est un isomorphisme de $\mathrm{GL_n}(\mathbb{R})$, ce qu'il fallait tout de même prendre la peine de démontrer.

Q 22. Peu de candidats ont traité cette question avec profit. Le fait que l'application $g \circ \sigma_P \circ g^{-1}$ est une symétrie était facile à établir en la composant avec elle-même, malheureusement certains candidats ont pris comme définition de la symétrie la propriété caractéristique des projections. Son caractère orthogonal est la traduction en termes d'endomorphismes de la troisième partie de la question précédente. Si plusieurs candidats ont vu la conservation de g(P) et de son orthogonal par $g \circ \sigma_P \circ g^{-1}$, bien peu ont pensé à vérifier que sa restriction à g(P) est l'identité et celle à son orthogonal est l'opposé de l'identité. La conservation de l'orthogonalité de deux vecteurs pouvait alors s'obtenir en prenant la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan orthogonal à l'un des vecteurs. La dernière partie de la question résultait alors du fait que tout élément de K est composé de trois matrices orthogonales.

Quand ils seront devenus ingénieurs, les candidats à ce concours auront sans doute oublié une grande partie de ce qu'ils auront appris sur les bancs des classes préparatoires, et en particulier leur enseignement de mathématiques. Au moment d'en subir les épreuves, ils considèrent peut-être que c'est une étape fastidieuse, mais incontournable, un moyen de sélection parmi d'autres pour retenir les futurs étudiants des grandes écoles. Toutefois, qu'ils n'oublient pas que, dans toutes les techniques qu'ils mettront en œuvre, les mathématiques jouent généralement un rôle essentiel, et que l'utilité de celles-ci se découvre parfois de manière fortuite : qu'il suffise de penser à la théorie des ondelettes qui joue un rôle majeur dans le format d'image jpg, et à celle des groupes cycliques finis sans laquelle le cryptage RSA n'existerait pas. Et s'ils vont visiter le château du Clos-Lucé à Amboise, après être tombés en admiration devant la réalisation concrète des idées de Léonard de Vinci, qu'ils méditent cette pensée de lui affichée dans l'une des salles : « Aucune investigation humaine ne peut s'intituler véritable science si elle ne passe pas par la démonstration mathématique ».

1.2.3. Mathématiques I — PC

- Présentation du sujet

Ce sujet a pour thème la théorie des chaines de Markov homogènes à ensemble d'états fini. Il se décompose comme suit.

- La partie **I**, essentiellement probabiliste est centrée sur un exemple (déplacement d'un rat dans un labyrinthe). Une matrice stochastique y fait son apparition.
- La partie **II** établit un résultat classique relatif aux suites de matrices, la convergence au sens de Cesàro de la suite des puissances d'une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont la norme d'opérateur (relativement à une certaine norme sur $\mathbb{R}^n$) est majorée par 1. Elle met en jeu des arguments simples d'algèbre linéaire ou de théorie des espaces normés de dimension finie.
- La partie **III** fait établir les résultats de base sur les matrices stochastiques. On montre que le résultat de la partie **II** s'applique aux matrices stochastiques ; dans le cas irréductible, on détermine le sous-espace propres associé à 1 et on établit qu'il existe une unique distribution de probabilités invariante. Cette partie est centrée sur l'algèbre linéaire (avec un peu de réduction).
- La partie **IV** réexamine l'exemple de la partie **I** à la lumière de l'étude théorique précédente.

- Commentaires généraux

La description précédente montre que le sujet, dont l'objet est très classique, abordait des thématiques variées et centrales du programme. Il était de longueur raisonnable, a été presque entièrement traité dans les meilleures copies et significativement dans beaucoup d'autres. Il a permis un excellent étalonnage des notes. Malgré tout, le nombre de copies faibles demeure important. C'est ainsi que certaines questions très simples (1,2,5,6,11,12) n'ont pas été traitées correctement par de nombreux candidats. La rédaction des questions de probabilités est en progrès, mais certains candidats persistent dans des rédactions littéraires et non convaincantes ; pour donner un exemple, on attend à la question 5 une réponse plus précise que la position du rat à l'instant 1 dépend de la position durant à l'instant 0, donc S_0 et S_1 ne sont pas indépendantes. Rappelons que l'on exige en probabilités une rédaction aussi nette que dans les autres branches des mathématiques.

- Conseils aux futurs candidats

Comme d'habitude, ce sujet valorisait le travail en profondeur du cours. Les nombreuses erreurs observées dans les questions probabilistes dénotent un manque de sérieux à cet égard (ignorance de la formule des probabilités totales, incompréhension de la notion d'indépendance). Beaucoup de candidats n'arrivent pas à se représenter les objets qu'ils manipulent, d'où des erreurs de typage très surprenantes (les suites vectorielles considérées dans le problème deviennent ainsi numériques dans nombre de copies). On relève par ailleurs assez fréquemment une mauvaise maitrise du calcul matriciel, de la notion de convergence dans un espace normé, ainsi qu'une grande désinvolture dans le maniement des inégalités. Nous incitons donc les candidats à apprendre leur cours de manière réfléchie et à ne pas manipuler aveuglément les objets mathématiques. Il est également rappelé que les tentatives de bluffs préviennent très défavorablement le correcteur.
La rédaction est systématiquement évaluée. Les questions faciles ne doivent pas être expédiées : des arguments et des calculs clairs convainquent rapidement le correcteur de l'honnêteté et de la solidité mathématique du candidat. Rappelons aussi l'importance de la présentation. Les copies peu lisibles sont pénalisées. À l'inverse, une présentation soignée (Écriture lisible, absence de ratures, résultats encadrés) dispose très favorablement le correcteur.

- Analyse détaillée des questions

Q 1. La question était un peu imprécise : il aurait été plus correct de rédiger en termes de combinaisons linéaires de suite que de raisonner à k fixé. Cette imprécision n'a pas gêné les candidats. La question a été assez bien traitée ; cependant, les candidats les plus faibles ne maitrisent pas les probabilités conditionnelles.

Q 2. Succès honorable pour cette question, même si les explications sont souvent décevantes (trop longues dans quelques copies, quasiment absentes dans beaucoup) et si on relève des confusions entre B et sa transposée.

Q 3. Cas particulier d'un résultat général établi dans la partie **II** : un vecteur dont toutes les coordonnées sont égales est fixe par une matrice stochastique. Certains devinent (ou connaissent) le résultat, sans vraiment le démontrer. Beaucoup d'affirmations fausses (par exemple la matrice est symétrique donc 1 est valeur propre). Dans un nombre significatif de copies, des calculs très laborieux de polynôme caractéristique et/ou une résolution non moins laborieuse de système linéaire, généralement non aboutie.

Q 4. Il suffit de montrer que $BX_0 = X_0$, ce qui est vu par beaucoup de candidats. Ceux dont la matrice B est fausse n'aboutissent pas ou bluffent. Quelques tentatives maladroites (diagonalisation de B) et quelques réponses grotesques ($X_k = B^k X_0$, donc la loi est géométrique).

Q 5. Question immédiate en termes de probabilités conditionnelles, qui a appelé pas mal de réponses insuffisantes (S_1 dépend de S_0, cf supra) ou absurdes ($S_1 = S_0$ donc S_0 et S_1 sont indépendantes).

Q 6. Début des erreurs de typage, beaucoup de candidats écrivant $u(x)^k$ pour $u^k(x)$ et sommant une suite géometrique de vecteurs ! La notation I_E n'est pas toujours comprise et on relève des confusions entre $I_E(x)$ et x.

Q 7. à nouveau des erreurs sur $u^k(x)$ (ici, la formule du binôme est parfois sollicitée). Certaines copies voient le télescopage, mais concluent directement, sans comprendre qu'il est essentiel de borner $\|u^k(x)\|$ (ce qui est immédiat vu qu' u est 1-lipschitzienne).

Q 8. Question discriminante, qui demandait de combiner le théorème du rang et les résultats des deux questions précédentes. Il est surprenant que la première partie de l'argument ne soit pas vue plus souvent. Beaucoup de candidats se sont enlisés dans des analyses synthèses sans résultat.

Q 9. Les candidats qui traitent Q8 réussissent en général cette question. Cependant, le projecteur n'est pas toujours correctement précisé (les deux espaces doivent être indiqués), et est parfois décrété orthogonal alors que l'énoncé ne mentionne pas de structure euclidienne.

Q 10. Une partie des candidats comprend qu'il faut appliquer le résultat de Q9 à l'endomorphisme canoniquement associé à A. En revanche, très rares sont ceux qui relient la convergence simple de la suite d'application linéaire à la convergence (au sens convergence dans un espace normé de dimension finie) de la suite de matrices.

Q 11. Question très simple, correctement comprise dans la plupart des copies, même si l'équivalence n'est pas toujours dégagée. Traiter le cas $n = 2$ ou $n = 3$ n'est pas suffisant !

Q 12. à nouveau une question simple et relativement réussie. Oubli assez fréquent (et pénalisé) de la condition de positivité.

Dans certaines copies, $AU = U$ est supposé montrer la stabilité (on prend $B = U$).

Q 13. La convexité est mieux réussie que le caractère fermé. On relève encore l'oubli de la condition de positivité, et quelques rédactions trop floues pour le caractère fermé (ensemble défini par des égalités et des inégalités larges, sans mention de la continuité).

Q 14. Question centrale, souvent abordée. La rédaction n'est pas toujours satisfaisante : l'inégalité triangulaire est souvent escamotée, le rôle de la positivité des coefficients mal expliqué. De très grosses confusions dans certaines copies faibles (les coordonnées de AX sont incorrectes).

Q 15. Cette question, souvent abordée, demandait du soin et a rarement été complètement traitée. Une réponse correcte demandait de préciser le caractère stochastique de A^p (conséquence de Q11) et d'écrire précisément les inégalités, en mettant en lumière l'importance de la stricte positivité des coefficients.

Q 16. Pas mal de réponses aberrantes et de confusions (je prends $p=1$) ; assez rares sont les candidats qui dégagent nettement les éléments la preuve (l'inclusion triviale vient de Q11, l'autre de l'inclusion du noyau de $A-I_n$ dans celui de A^p-I_n et de la question précédente).

Q 17. Question facile, qui pouvait être traitée de diverses façons, honorablement réussie et a permis des grappillages de points. Mais encore une fois, oubli assez récurrent de la positivité.

Q 18. Question de synthèse, traitée avec efficacité dans les bonnes copies, mais souvent réduite à un empilement d'affirmations sans références précises aux questions antérieures.

Q 19. Beaucoup de candidats se rappellent un exercice traité en classe (description des matrices de rang 1 comme produit colonne-ligne sans voir qu'ici U est imposée (comme image de P), ce qui nécessitait un bon recul. On relève beaucoup de fautes de logique, consistant à prétendre prouver l'égalité à partir du fait que UL vérifie des propriétés analogues à celles de P.

Q 20. Cette question demandait également un bon recul sur le sujet. Seules les très bonnes copies produisent des réponses satisfaisantes et on observe beaucoup de tentatives (infructueuses) de bluff. L'unicité est très rarement traitée.

Q 21. Cette question demandait de bien comprendre le sujet. À partir de l'égalité $LA^p=L$, la stricte positivité des coefficients de A^p fournissait le résultat. Peu de candidats l'ont vu.

Q 22. Question délicate, très rarement résolue. Confusion fréquente entre la multiplicité et la dimension du sous-espace propre.

QQ 23-24. Quelques rares candidats ont montré qu'ils avaient bien compris le thème du problème en répondant correctement à cette question. Certains n'ont pas réalisé que le calcul de la loi invariante avait été fait dans la partie **I**.

1.2.4. Mathématiques II — PC

- Remarques générales

Le problème proposé était consacré à une estimation du temps moyen de première répétition d'un processus aléatoire simple. Pour obtenir cette estimation, on commençait par établir quelques résultats asymptotiques liés aux sommes partielles de la série exponentielle.

Le sujet avait été conçu pour être abordable et raisonnablement progressif, mais le jury a constaté que, bien souvent, un grand nombre de notions de base n'étaient pas maîtrisées par les candidats, et que leurs réponses (y compris aux questions les plus faciles) manquaient de justifications satisfaisantes.

Le sujet était composé de 5 parties, les 4 premières aboutissant à une estimation de $T_n(1)=\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}$ et la dernière étant probabiliste.