



1/ CONSIGNES GÉNÉRALES :

Présentation du sujet :

Le sujet proposait l'étude d'un automate qui génère à des instants successifs les lettres C ou P. On s'intéressait alors particulièrement au temps d'attente Y d'une certaine séquence de lettres et à sa fonction génératrice. Le problème comportait 5 parties largement indépendantes les unes des autres. La partie I consistait à retrouver les résultats du cours sur la loi géométrique en probabilité. La partie II établissait des résultats préliminaires d'analyse sur les séries entières. En partie III, un cas intermédiaire était abordé : son étude nécessitait d'établir une formule de récurrence linéaire d'ordre 2 et les propriétés de Y en découlaient assez simplement. Des résultats particuliers d'algèbre linéaire étaient ensuite établis en partie IV afin d'étudier un cas plus complet en partie V.

La problématique du sujet était largement inspirée par l'étude des automates telle qu'elle est abordée par Graham, Knuth et Patashnik dans le livre « Mathématiques concrètes ».

Dans son ensemble, le sujet cherchait à évaluer les candidats sur les connaissances d'une partie la plus large possible du programme. La difficulté des questions se voulait progressive et de nombreuses questions correspondaient à des applications directes du cours ; les questions ouvertes n'étaient pas bloquantes si bien qu'un candidat n'ayant pas trouvé le bon résultat à une question ouverte pouvait continuer sa composition sans difficulté. Le sujet se donnait également pour but d'évaluer chez les candidats les six compétences explicitement détaillées dans le programme de PCSI-PC. La longueur relative du sujet était un point essentiel d'évaluation de l'efficacité des candidats.

Problèmes constatés par les correcteurs :

L'épreuve de cette année s'est avérée très discriminante. Un nombre plus conséquent de candidats a su mobiliser ses connaissances et ses compétences afin de réussir pleinement les deux tiers du problème. En revanche, le reste des candidats s'est retrouvé assez rapidement en difficulté et n'a pu réussir correctement que les questions du problème faisant intervenir des compétences de manipulation élémentaire des outils mathématiques ou de représentation.

La présentation écrite est très bonne, en règle générale. La mise en œuvre de stratégies pour répondre correctement à un maximum de questions a encore progressé si bien que les copies traitant sérieusement moins de 15 questions sont quasiment inexistantes. Les candidats ayant traité la quasi-totalité du sujet sont moins rares cette année.

La tonalité « probabiliste » du sujet a pu faire peur à certains candidats mais la variété des parties du programme présentées a toujours permis d'évaluer ces candidats sur leurs compétences en analyse et en algèbre.

Tout cela ne doit pas pour autant occulter les graves lacunes qu'ont rencontrées les correcteurs cette année encore. On constate notamment :

- une maîtrise très insuffisante du socle des connaissances ; les définitions moins courantes sont souvent oubliées ;
- les candidats s'engagent souvent dans des calculs sans prendre de recul alors que le résultat peut être obtenu avec beaucoup plus de concision ;
- les liens logiques entre les différentes parties d'un même raisonnement ne sont pas toujours très clairs ;
- beaucoup de candidats essaient de « bluffer » le correcteur en faisant croire qu'ils ont obtenu honnêtement le résultat ; cette attitude n'a pas manqué d'être préjudiciable à l'évaluation globale de la copie.

Sur quelques points du programme de PCSI-PC, nous ajouterons les remarques détaillées suivantes :

- en probabilités, l'indépendance des expériences dans la loi géométrique, la définition précise d'un système complet d'évènements, la formule des probabilités totales et la croissance de l'espérance doivent être mieux connues ;
- en algèbre, la définition de vecteur propre et le lien avec sa valeur propre associée, la multilinéarité du déterminant, les propriétés de la transposée d'une matrice, le théorème de d'Alembert-Gauss et la multiplicité d'une racine doivent être mieux compris ;
- en analyse, la manipulation de la règle de d'Alembert pour les séries entières, les équivalents simples, la manipulation d'inégalités, les propriétés de la valeur absolue, le produit de Cauchy, le développement en série entière et la dérivabilité d'un quotient de fonctions doivent être mieux assimilés.

2/ REMARQUES SPECIFIQUES :

Partie I (Etude d'un cas simple) :

Q1. La loi géométrique a été reconnue dans la très grande majorité des cas mais l'indépendance des expériences de Bernoulli donnant lieu à un temps d'attente est très rarement évoquée.

Q2. La maîtrise des arguments permettant de conclure à la valeur du rayon de convergence n'est pas au rendez-vous. Beaucoup utilisent la règle de d'Alembert pour les séries (souvent sans précaution avec le cas $x = 0$) et affirment que ce critère donne une condition nécessaire et suffisante de convergence de la série entière. L'oubli des valeurs absolues est fréquent. L'inégalité $1/p > 1$ n'est pas souvent traitée.

Q3. La justification de la dérivabilité est souvent laborieuse.

Q4. La formule donnant la variance de Y à l'aide des dérivées de G en 1 est mal connue.

Partie II (Séries entières) :

Q5. Même genre de problème qu'en **Q2**.

Q6 et Q7. Bien réussies.

Q8. Réussie seulement dans une bonne moitié des cas et rarement bien justifiée. Confusions entre suites et constantes, entre inégalité et négligeabilité, disparition des constantes multiplicatives dans l'équivalent simple.

Q9. La question pouvait se faire avec **Q8** pour le rayon de convergence et avec le produit de Cauchy pour l'égalité.

Pour l'égalité, les candidats ont souvent opté pour la version calculatoire à l'aide de **Q7** sans reconnaître de produit de Cauchy.

Q10 et Q11. De graves confusions entre les notions « développable en série entière au voisinage de 0 » et « fonction prolongeable par continuité en 0 » ou encore « fonction de classe C^∞ ».

Partie III (Etude d'un cas intermédiaire) :

Q12. Les résultats sont souvent justes mais la décomposition des événements en réunions et intersections est rarement faite.

Q13. La définition d'un système complet d'événements est très rarement donnée correctement. Beaucoup de confusions avec une conséquence de la définition : vérifier que la somme des probabilités vaut 1 n'est pas suffisant.

Q14. La formule des probabilités totales (dont l'emploi était largement suggéré par la question **Q13**) a été assez rarement utilisée. Les candidats ont donc souvent paraphrasé le résultat sans la moindre justification mathématique convaincante.

Q15. Ce calcul d'analyse un peu technique a posé des problèmes aux candidats faibles.

Q16. La question la mieux réussie de tout le problème.

Q17. Une question simple du niveau du secondaire qui pouvait se faire avec concision grâce aux éléments indiqués pour faire gagner du temps. Malgré cela, certains candidats ont effectué le développement de $(t - a)(t - b)$ en se trompant dans le calcul.

Q18. Souvent traitée mais très mal réussie. Les candidats ont de gros problèmes de manipulation des valeurs absolues. La fonction valeur absolue est assimilée à une fonction croissante ou décroissante sur \mathbb{R} suivant les besoins. L'inégalité $a > 1$ est souvent parachutée après des calculs obscurs et sans issue.

Q19 et Q20. Le lien avec les questions précédentes est souvent fait.

Q21. Le raisonnement pour obtenir l'existence de l'espérance et de la variance est souvent confus. Le résultat final n'est pas toujours atteint par manque de maîtrise dans le calcul de la dérivée et dans les simplifications tenant compte du fait que $p = 1 - q$.

Q22. Bien réussie.

Q23. Grave confusion entre $E(Z) \geq E(Y)$ et $E(Z) \geq E(Y) + 1$. Beaucoup d'arguments trop vagues sur le résultat en moyenne. Quasiment personne ne justifie que $Z \geq Y + 1$ pour utiliser ensuite la croissance de l'espérance.

Partie IV (Algèbre linéaire) :

Q24. Que de perte de temps sur cette question. La plupart des candidats commence cette question en calculant le polynôme caractéristique qui est demandé en question suivante. La question faisait un tout et déterminer un vecteur propre associé à 0 permettait directement de vérifier que 0 était valeur propre.

Q25. Bien réussie.

Q26. Très bien réussie à part quelques candidats qui ne font pas attention au sens dans lequel les produits matriciels sont exécutés.

Q27. La propriété de multilinéarité n'étant connue que par une moitié des candidats, les autres ont utilisé la question **Q28** pour répondre à la question.

Q28. Beaucoup de candidats trouvent ce polynôme en refaisant un calcul direct et long de déterminant. En utilisant **Q27**, c'était immédiat dans le cas où t est différent de 0. Pour $t = 0$, c'est aussi immédiat par propriété de la matrice identité.

Q29. Cette question a souvent posé des problèmes. Le lien entre la non-nullité du déterminant et l'existence et unicité d'une solution du système n'est pas clair pour beaucoup.

Q30, Q31 et Q32. Bien réussies.

Q33. Pour réussir cette question, la plupart des candidats refait un calcul long de déterminant !

Q34. Le résultat était souvent parachuté. Avec quelques détails, on comprenait parfois que le candidat choisissait de prendre $x_4 = 0$.

Q35. Cette question a été mal réussie à cause de la confusion fréquente entre inégalité stricte et inégalité large. Dans le cas i), il est souvent utilisé que $|x_1| < |x_3|$ pour aboutir au résultat.

Q36. Le théorème de d'Alembert-Gauss est parfois évoqué à travers le fait que tout polynôme complexe est scindé. Toutefois, il est très rare d'avoir l'argument sur la multiplicité de 0 dans le polynôme (confusion fréquente avec la dimension du sous-espace propre associé à 0).

Q37. La question a été rarement traitée. Le lien avec **Q27** et **Q36** a été vu mais il ne fallait pas oublier le cas $t = 0$.

Partie V (Etude d'un dernier cas) :

Q38 et Q39. Bien réussies.

Q40. La rédaction n'évoque quasiment jamais de système complet d'évènements ni de formule des probabilités totales.

Q41, Q42, Q43 et Q44. Bien réussies par ceux qui ont traité ces questions.

Q45. Le calcul est rarement bien maîtrisé jusqu'à une formule juste.

Q46. La représentation du schéma a été réussie par ceux qui ont traité cette question. En revanche, la matrice associée était rarement correcte. La méthode générale a été bien comprise par les rares candidats à avoir traité cette dernière question.