1/ REMARQUES GÉNÉRALES

Le problème proposé cette année portait sur les matrices stochastiques. Il s'agissait donc essentiellement d'un problème portant sur l'algèbre linéaire et les probabilités. La première partie propose une introduction, dans le cas de l'ordre deux, avec un peu de calculs simples : essentiellement un calcul de puissance d'une matrice carrée2×2 et des probabilités conditionnelles. La seconde partie pose le cadre général des matrices stochastiques, la troisième traite d'un exemple et la dernière partie traite de la limite d'une suite de puissance de matrices stochastiques, déjà vu en III.

De manière générale, les correcteurs ont apprécié les copies bien présentées, où les résultats apparaissent clairement en fin d'une justification bien construite et complète. Si quelques candidats ont pu traiter avec succès une grande partie de l'épreuve, on ne peut que regretter le nombre croissant de copies quasi vides.

Si on note avec plaisir la présence d'un nombre non négligeable d'excellentes copies, aussi bien du point de vue du contenu que de la rédaction, on ne peut que s'inquiéter du niveau trop faible de beaucoup d'autres. D'une manière générale, les résultats faibles semblent dus à un grand manque de maîtrise de l'algèbre linéaire et, plus prosaïquement, à un manque de maîtrise presque total du calcul.

2/ REMARQUES SPÉCIFIQUES :

Partie I

La première partie a été en général abordée par tous, avec des disparités assez grandes. Dans Q2, trop peu de candidats justifient que les valeurs propres sont distinctes. Dans Q3, beaucoup de candidats ne calculent pas explicitement les puissances de $A(\alpha , \beta)$ et se contentent d'écrire $A(\alpha , \beta)^n = P\, D^n\, P^{-1}$, ce qui est évidemment pénalisant. Certaines copies proposent un calcul par récurrence sans passer par la diagonalisation : ce choix se révèle entraîner assez souvent une perte de temps significative. Dans d'autres cas, ce calcul n'est même pas abordé !

Les questions 5 et 7 n'ont été bien traitées que dans de rares cas. De trop nombreux candidats se contentent simplement de paraphraser l'énoncé pour justifier la première égalité de Q5. L'obtention du minorant dans Q5 a été faite par une infime minorité. L'inégalité de Q6 n'est pas toujours justifiée. Enfin, la question 7 n'est en général pas traitée. Il faut noter qu'une part non négligeable des candidats n'aborde pas du tout les questions Q5 à Q7.

On peut malheureusement remarquer que, dès le début de l'épreuve, pas mal d'erreurs de calculs, oubli des modules dans des inégalités, présence de dénominateurs susceptibles de s'annuler, voire une incapacité à diagonaliser une matrice élémentaire sont présents dans un nombre significatif de copies.

Quelques erreurs fréquentes dans cette partie :

1. Dans de nombreuses copies, le sous-espace propre associé à la valeur propre distincte de 1 (ce qu'il fallait justifier) est engendré par un vecteur qui n'est pas toujours défini (présence d'un dénominateur susceptible de s'annuler).
2. Le calcul de 'l'inverse d'une matrice 2x2 inversible est souvent faux ce qui est surprenant à ce niveau.

Partie II

La seconde partie assez simple dans son début, a mis en évidence pas mal d'erreurs dans des calculs élémentaires. Si les questions Q8, Q9 et Q10 sont plutôt bien traitées par la majorité des candidats, les questions Q13 et Q14 ont finalement été peu abordées (environ 65 % des candidats n'obtiennent presque aucun point dans ces questions).

La première partie de Q15 est comprise en général mais on note parfois des calculs longs et inutiles qui donnent l'impression que le candidat avance à l'aveugle. Les candidats qui répondent correctement à la seconde partie de la question 15 réussissent également Q16. La question Q17 est comprise par une toute petite minorité de candidats et les calculs convaincants sont abordés dans moins de 1% des copies.

Quelques erreurs très fréquentes dans cette partie :

1. Dans Q15, le rang de $\mathbf{A}\text{-}\mathbf{I_n}$ est souvent donné comme égal au rang de $\mathbf{A_1}\text{-}\mathbf{I_n}$ sans aucune justification. Une utilisation fantaisiste et fréquente du théorème du rang (dim $\mathbf{M_n}(R)$= rg $\mathbf{A}\text{-}\mathbf{I_n}$ **+ dim ker** $\mathbf{A}\text{-}\mathbf{I_n}$**)** donne, par miracle, le résultat souhaité.
2. On trouve notamment dans ces questions des inégalités portant sur des matrices, des vecteurs...
3. Le module de la valeur propre disparaît régulièrement. On trouve encore trop souvent des inégalités entre nombres a priori complexes

Partie III

La question Q18 est abordée par une large majorité de candidats. Elle est bien traitée par la grande majorité d'entre eux, les autres écrivent 1/3 au lieu de 3/10 dans la matrice. Pour Q19, l'unicité est trop rarement justifiée.

Dans Q20, le fait que la matrice soit symétrique *réelle* n'a pas toujours été cité. Concernant les calculs en Q21, on note de grandes disparités parmi les candidats (aussi bien dans la qualité des calculs que dans l'utilisation de la calculatrice) et la question 22 conclusive de cette partie n'a été que très partiellement traitée. Dans cette question, fortement liée aux précédentes et assez rarement abordée, une toute petite minorité arrive à justifier le fait que la limite est indépendante de la loi initiale.

Partie IV

La question Q23 est abordée par bien trop peu de candidats Beaucoup n'ont certainement pas pris le temps de lire le sujet. L'existence d'éléments de réponse à la (difficile) question Q24 concerne au plus 1% des copies.

Des candidats ont noté qu'en admettant la question Q24, la question Q25 était facile. Beaucoup ont également réussi la Q26 qui suivait. Une lecture complète de l'énoncé en début d'épreuve aurait sans doute permis à un plus grand nombre d'aborder ces questions relativement faciles et d'engranger ainsi quelques points.

Dans la question Q27, peu abordée, on note des confusions entre les lignes et les colonnes dans les explications.