Mathématiques 2

Présentation du sujet

Les distributions sont une généralisation très féconde de la notion de fonction. On trouve illustré dans ce problème un aspect de l'analyse fonctionnelle moderne où les objets s'identifient aux opérateurs intégraux qu'ils permettent de définir. Une conséquence frappante est la possibilité de donner un sens satisfaisant à la dérivée de fonctions non continues.

D'autres aspects étaient abordés par le sujet de cette année : approximations de fonctions $\mathcal{C}^0$ par morceaux par des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ au moyen de produits de convolutions, topologie faible sur l'espace des distributions.

Le connaissances demandées étaient en général très élémentaires, à l'exception des théorèmes de convergence ou de dérivation de fonctions définies par des intégrales, autant d'applications du théorème de convergence dominée.

Analyse globale des résultats

Le sujet a pu paraitre inhabituellement court et il est clair que certaines questions étaient moins explicites qu'à l'accoutumée. Il a alors paru insurmontable à beaucoup de candidats de produire à la fois les réponses demandées et les justifications propres à toute rédaction mathématique. Cette évidente déstabilisation a engendré des copies parfois pauvres. Pourtant leur longueur (18 pages en moyenne) reste très excessive. Rappelons que les démonstrations attendues peuvent être succinctes, du moment qu'elles sont complètes. Elles ne doivent surtout pas être une addition d'arguments de toutes sortes qu'il reviendrait au lecteur de mettre en ordre, ou de rappels in extenso de théorèmes du cours.

Cette tendance au remplissage n'a pas compensé le manque d'initiative de beaucoup de candidats dès que l'énoncé donne moins d'indications.

Deux questions (II.B.2 et II.B.5a) faisaient référence à des fonctions $\mathcal{C}^1$ par morceaux, notion désormais hors programme en filière PC. Ces questions n'ont quasiment pas été abordées sous l'angle $\mathcal{C}^1/\mathcal{C}^1$ par morceaux. Elle étaient déjà substantielles en considérant la fonction $\mathcal{C}^1$ là où elle est continue et le jury a décidé de les voir ainsi. Au vue des copies, nous sommes persuadés que cela n'a pas biaisé l'évaluation des candidats.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

I.A.1a) Il est assez clair que pour $|x| < 1$, le sens de variation de $\exp(1 - \frac{1}{1-x^2})$ est le même que celui de $1 - x^2$.

I.A.1b) Les étudiants savent reconnaitre graphiquement une fonction non continue, mais ils n'en est pas de même de fonctions continues qui ne sont pas $\mathcal{C}^1$. On voit ainsi une majorité de graphes où la dérivée en ± 1 n'est clairement pas continue.

I.A.1c) Ici il semble difficile de ne pas faire d'abord une récurrence rapide sur la forme de la dérivée n-ième de φ sur $]-1, 1[$, du type $F_n\varphi$ où F_n est une fraction rationnelle (généralement différente de la fraction $(\frac{-2x}{1-x^2})^n$ parfois proposée). Trop de copies se bornent à donner les arguments classiques prouvant la propriété sur $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

I.A.2) Quelques imprécisions résultent du fait que la dérivée d'une fonction se calcule au voisinage d'un point, or la fonction peut être nulle en un point sans l'être autour. Nous avons fait preuve d'indulgence. Notons que le support d'une fonction continue f est a priori l'ouvert $f^{-1}(\mathbb{R}^*)$. L'expression « support compact », présente dans beaucoup de domaines, signifie ici essentiellement « support borné ».

I.A.3b) Beaucoup (trop) de démonstrations par récurrence. Noter qu'on aurait le même résultat avec $n \in]0, +\infty[$.

I.A.4) Point souvent abordé mais presque jamais correct. Il est remarquable que le théorème de convergence dominée doit sa puissance à la faiblesse de ses hypothèses, pourtant la question de la domination parait toujours la plus délicate. Il serait bon de disposer de quelques recettes qui s'appliquent souvent, résultant en général du caractère borné des fonctions continues sur un compact. Notons que le majorant peut n'être que continu par morceaux.

I.A.5b) La forme en trois plateaux est très rarement perçue.

I.A.5c) Très peu de réussite en conséquence à cette question (un candidat sur 20).

I.A.5d) Cette question demandait une grande capacité d'initiative, aucun résultat n'étant donné par l'énoncé. La fonction nulle (pour J) est plébiscitée. Quelques dizaines de candidats à peine notent que $I_n(1) = I_n(-1) = \frac{1}{2}$ pour $n \geqslant 1$.

I.A.5e) Là aussi, faute d'indication de l'énoncé, peu de copies envisagent une réponse négative.

I.B – Questions faciles, généralement bien traitées.

II.A.1) Ici à nouveau le théorème de convergence dominée — sous sa forme la plus simple — pose problème à nos candidats, en particulier pour justifier l'hypothèse de domination. Par contraste, le théorème où la suite de fonctions à intégrer converge uniformément sur un compact se démontre en quelques lignes et devrait être vu en exercice (noter que ce théorème n'est pas si facile à déduire du théorème de convergence dominée). Ici il était bon de majorer simplement $\left|\int f\varphi_n - \int f\varphi\right|$ par $\|\varphi_n - \varphi\|_\infty \cdot \left|\int f\right|$.

II.A.2) Le jury a fait preuve d'indulgence eu égard à l'imprécision de l'énoncé.

II.A.3a) Question généralement bien traitée.

II.A.3b) Cette question a aussi été abordée par de nombreux candidats mais sans en saisir l'esprit, le plus souvent. Des erreurs même sur la valeur de $\varphi_n(a)$.

II.B.1) Généralement correcte. Notons qu'il convenait de justifier $\varphi' \in \mathcal{D}$ et la linéarité.

II.B.2) Cette question facile (intégration par parties) n'a pourtant été convenablement traitée que dans les meilleures copies.

II.B.3) Question facile mais finalement peu abordée. Quelques tentations d'appliquer la question précédente.

II.B.4a) La fonction g telle que $T_g = T$ est correctement devinée.

II.B.4b) Le calcul de $T(\varphi')$ en fonction de φ est souvent bien conduit, mais beaucoup de candidats ne parviennent pas à identifier une fonction V telle que $T_V = T'$.

II.B.5) Question très rarement abordée.

II.C.1a) Démonstrations élémentaires — mais des erreurs toutefois. La convergence dominée est très rarement invoquée.

II.C.1b) Peu de réponses mais généralement correctes.

II.C.1c) Parmi les rares copies ayant abordé la question on trouve parfois la définition $V_n = U'_n$, que nous avons admise dans ce contexte.

II.C.2b) Des copies faibles ont pu aborder cette question à cause de l'étude de fonctions qu'elle demandait. Le barème toutefois ne saurait valoriser beaucoup la représentation de fonctions aussi usuelles !

Conclusions

L'épreuve de cette année a encore permis de dégager un lot de bons candidats possédant de solides connaissances et de vraies capacités d'initiative pour les mettre à contribution. Mais ces bonnes copies ont paru moins nombreuses et le reste des candidats a aussi été plus uniforme que d'autres années.