1/ CONSIGNES GENERALES :

1.a) Présentation du sujet

Le sujet se proposait d'étudier les notions de polynôme, de matrice et de système différentiel stables.

La **partie I** étudiait la problématique dans des cas simples où les calculs étaient très largement guidés et devaient pouvoir se faire en une trentaine de minutes.

La **partie II** introduisait les notions de norme subordonnée et de mesure de Lozinskiĭ. Certaines propriétés simples de la norme subordonnée étaient proposées afin de permettre d'en déduire celle sur la mesure de Lozinskiĭ. L'énoncé dégageait en fin de partie une condition suffisante de stabilité d'une matrice en terme de mesure de Lozinskiĭ.

La **partie III** étudiait un exemple assez général de mesure de Lozinskiĭ associée à une norme quadratique. Cela donnait l'occasion d'utiliser le cours d'algèbre bilinéaire.

La **partie IV** développait complètement le cas des polynômes de degré 3. La condition nécessaire de stabilité s'obtenait de manière élémentaire. La condition suffisante était traitée grâce aux résultats des deux parties précédentes.

La **partie V** appliquait la partie précédente à un exemple simple issu d'une matrice d'ordre 3 et donnant lieu à un système différentiel stable.

Le sujet, dans son ensemble, se donnait pour but d'évaluer chez les candidats la connaissance du cours, la qualité du raisonnement ainsi que l'efficacité. La longueur relative du sujet était justement un point important d'évaluation de cette dernière compétence. La qualité du raisonnement aura été testée aussi bien sur des questions du niveau de l'enseignement secondaire (premières questions de la partie I et certaines questions de la partie IV) que du niveau de la classe préparatoire. Aucune question à elle seule ne nécessitait un raisonnement combinant plusieurs idées fines et originales.

1.b) Problèmes constatés par les correcteurs

Les correcteurs de cette épreuve ont constaté, d'une part, que le soin et la présentation globale des copies étaient bons et d'autre part, que les copies très faibles étaient peu nombreuses.

En revanche, les très bonnes copies se font de plus en plus rares.

La connaissance du cours et sa restitution correcte dans un cadre particulier ont posé de nombreux problèmes dans les parties plus théoriques. Concernant l'efficacité, on constate que trop de candidats font le choix de méthodes de calcul et de raisonnements inutilement longs, perdant ainsi un temps précieux. Tout au contraire, une petite minorité de candidats calcule, raisonne et rédige de façon juste, concise et synthétique, qualités toujours très appréciées des correcteurs.

Nous conseillons aux futurs candidats une lecture plus attentive du sujet afin de bien utiliser les hypothèses.

La longueur de l'épreuve ne s'est pas avérée pénalisante même si les candidats ayant bien traité l'ensemble du sujet se sont fait très rares (moins de 5 %).

Il a été noté plus particulièrement cette année que certains candidats confondent rapidité et précipitation. Pour des questions dont le résultat est donné dans l'énoncé, il est clair que les correcteurs attendent un minimum d'intermédiaires de calculs permettant de s'assurer que le candidat a maîtrisé son calcul.

La partie I (très élémentaire) a été bien réussie par une très grande majorité de candidats.

Les parties II et III ont été abordées de façon parcellaire et ont engendré de nombreux problèmes de raisonnement.

La partie IV a permis à de nombreux candidats de reprendre pied sur des questions plus calculatoires dans lesquelles le résultat était donné explicitement.

Les questions de la partie V, plus faciles, ont été traitées correctement par les candidats les plus efficaces.

2/ REMARQUES SPECIFIQUES :

Partie I

I.1. Très bien réussi. La plupart des candidats ont obtenu le résultat en développant le polynôme $(X - z_1)(X - z_2)$ et en utilisant l'unicité des coefficients d'un polynôme.

I.2.a et b. Très décevant par rapport à la facilité de la question. Malgré l'hypothèse $\Delta > 0$, environ un tiers des candidats part du principe que les racines sont complexes non nécessairement réelles.

I.3. Très bien réussi.

I.4.a. Beaucoup de candidats donnent le résultat comme un fait général des polynômes sans utiliser le fait que les coefficients sont réels ou que les deux racines sont non réelles. En donnant la forme explicite des racines, le résultat se révèle plus clair à condition de bien écrire $\sqrt{-\Delta}$ ou $\sqrt{|\Delta|}$ et non $\sqrt{\Delta}$ dans la formule.

I.4.b. Bien réussi sauf pour la non-nullité de b.

I.5.a. Conséquence d'un résultat du cours très bien connu.

I.5.b. Le lien avec les questions précédentes est fait parfois de façon implicite alors qu'on demandait surtout de lister explicitement les questions qu'on utilisait.

I.6.a. La factorisation $Q = (X + 1)(X - i)(X + i)$ a été souvent donnée, mais beaucoup de candidats donnent $1, i$ et $-i$ comme racines (étourderie ou incompréhension).

I.6.b. et c. Bien réussi.

Partie II

II.1.a. La définition précise d'une norme est très mal connue.

II.1.b. Question très mal réussie car le résultat est souvent donné sans réelle justification.

II.1.c. Très mal réussi. Pourtant, il suffisait essentiellement de rappeler que $\mathcal{B}$ est une partie fermée et bornée de $\mathcal{B}$ et d'utiliser la question précédente.

II.1.d. Très bien compris.

II.1.e. Très peu ont l'idée de normer pour traiter le cas général à partir du cas $x \in \mathcal{B}$.

II.1.f. Les raisonnements sur la borne supérieure sont très souvent erronés car ils sont souvent assimilés à un "passage à la limite" dans l'inégalité. Par exemple, beaucoup de candidats partent de $||Ax|| - ||Bx|| \leqslant ||(A-B)x||$ et pensent pouvoir conlure par "passage à la borne sup". On insistera donc ici sur le fait qu'une rédaction correcte doit faire intervenir la borne supérieure en tant que "plus petit des majorants".

II.2. Question peu abordée.

II.3.a. Très bien réussi.

II.3.b. Le lien avec la question II.1.f a été souvent bien vu. Certains candidats sont prêts à mettre des inégalités entre matrices et à "composer" par la norme pour aboutir au résultat demandé.

II.3.c. Beaucoup de candidats ont voulu montrer directement $|\mu(A,u)| \leqslant |||A|||$ en utilisant une inégalité et en "composant" cette inégalité avec la valeur absolue.

II.3.d. Cette question s'est avérée être très rarement traitée correctement. La croissance de la fonction n'a pas été assez souvent utilisée car la plupart des candidats se sont persuadés que le caractère borné suffisait par une utilisation erronée du théorème de l'encadrement.

II.4.a. L'idée de normer le vecteur propre est encore très largement absente. Bien réussi pour la deuxième partie de la question.

II.4.b. et c. Relativement bien réussi mais assez peu traité.

Partie III

III.1. Très bien réussi.

III.2. Le fait que la matrice ${}^tA + A$ soit symétrique n'est pas apparu clairement à beaucoup de candidats. On rappelle que dans le théorème spectral, l'hypothèse est d'être symétrique et **réelle** sans quoi le résultat est faux en général. La possibilité d'avoir une matrice diagonale avec les valeurs propres dans un ordre fixé à l'avance échappe à la quasi-totalité des candidats.

III.3.a. et b. Correctement traité.

III.3.c. Certains rares candidats se sont rendus compte qu'on pouvait prendre tout simplement $\gamma = 0$ et $\delta = \|A\|_2^2$.

III.3.d. Le résultat aurait dû être formulé pour u dans un voisinage de 0 pour justifier le passage à la racine carrée. Ce problème n'a semblé gêner qu'un très petit nombre de candidats. L'inégalité de droite a été bien traitée mais celle de gauche a été souvent l'occasion de raisonnements très douteux avec α_n qui se transforme en α_1 comme par enchantement.

III.3.e. Peu traité mais correctement réussi par ceux qui l'ont traité.

III.4.a. et b. Peu abordé.

Partie IV

IV.1. Très bien réussi.

IV.2. Ce résultat, bien que classique, n'est pas explicitement un résultat du programme : on s'attendait donc à une démonstration par le théorème des valeurs intermédiaires ou en tenant compte du fait que les racines complexes non réelles d'un polynôme à coefficients réels vont par deux.

IV.3.a. C'est dans cette question que les correcteurs ont pu le mieux constater la confusion entre "complexe" et "complexe non réel". Une moitié des candidats en arrive donc à dire que dans tous les cas (même si z_2 est réel), z_2 et z_3 sont des complexes conjugués.

IV.3.b. Question calculatoire très bien réussie. Il suffisait de se donner la peine d'écrire quelques inégalités, ce que n'ont pas fait les quelques rares copies très faibles.

IV.4.a. Même genre de problème qu'en IV.3.a pour une minorité de candidats. Les autres candidats ont essayé explicitement de montrer le résultat à partir des relations de IV.1 et ont réussi. Attention tout de même à ceux qui "simplifient" les facteurs multiplicatifs sans précaution de non nullité.

IV.4.b. et c. Bien réussi à condition que les candidats ne fassent pas qu'un simulacre de calcul.

IV.5. Assez mal réussi. Beaucoup de candidats supposent par l'absurde que tous les α_i sont non nuls. D'autres raisonnent à nouveau sur le signe en confondant les inégalités strictes et les inégalités larges.

IV.6.a. Question simplement calculatoire très bien réussie. Le résultat était donné pour pouvoir faire librement le lien entre les questions même si cela n'a pas toujours suffi.

IV.6.b. Question facile mais relativement peu abordée par crainte de perdre du temps dans les calculs matriciels. Le calcul de l'inverse d'une matrice diagonale est souvent laborieux.

IV.6.c. et d. Peu abordé bien que facile à traiter en faisant le lien entre les questions.

Partie V

V.1. Sans difficulté étant donné que le résultat était fourni.

V.2. Bien réussi.

V.3. Beaucoup de candidats ont eu l'intuition que le polynôme était scindé à racines simples. En revanche, beaucoup ont cru qu'il n'y avait qu'une racine réelle et deux racines complexes non réelles conjuguées par simple application de la partie IV.

V.4.a. Peu abordé mais bien réussi sinon.

V.4.b Peu abordé. Des erreurs toutefois dans la position des constantes arbitraires.

V.4.c. Le passage de Y à X a été bien vu, mais la réécriture de X sous forme réelle n'a quasiment jamais été correctement justifiée.

V.4.d. Facile mais peu abordé.