1/ Présentation du sujet

Le sujet proposait deux exercices. Le premier demandait de calculer une intégrale double élémentaire (le mieux était d'utiliser un changement de variables polaires), le deuxième étudiait les différentes dimensions possibles pour l'espace vectoriel des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2.

Ensuite, un problème prouvait des convergences de séries à l'aide de transformations d'Abel, pour des séries numériques puis pour la convergence uniforme de séries de fonctions et de séries entières.

Ce sujet balaye une bonne partie du programme d'analyse de la classe de MP.

La moyenne de l'épreuve est de 11,17 et l'écart type est de 4,18.

2/ Remarques générales

Le sujet, bien équilibré et progressif, ne comportait aucune difficulté sérieuse et proposait des questions accessibles jusqu'à la fin. Il permettait de mesurer l'étendue des connaissances essentielles en analyse. Un certain nombre de questions étaient guidées et proches du cours. Les parties étaient largement indépendantes ce qui permettait aux candidats de ne pas rester bloqués. Un candidat bien préparé pouvait faire le sujet dans son intégralité.

C'est un sujet qui a parfaitement rempli son rôle et permis de bien classer les candidats.

Conseils aux futurs candidats

- Réviser le cours. Savoir refaire les démonstrations des théorèmes importants.
- Prendre le temps de comprendre la question posée avant de répondre.
- S'entrainer à des sujets qui demandent de rechercher des exemples ou contre-exemples (simples), les sujets CCP en demandent souvent.
- Certaines réponses peuvent tenir en une ou deux lignes.
- Citer TOUS les théorèmes utilisés et rappeler sur le moment toutes les hypothèses utiles mêmes si elles figurent quelques lignes plus haut ou à la question précédente.
- Si l'énoncé demande de « en déduire » ou d'utiliser la question précédente, il ne sert à rien de répondre à cette question par une autre méthode. Le candidat doit mentionner l'endroit où il utilise le résultat précédent.

- Dans une démonstration, éviter d'utiliser le résultat qui doit être prouvé.
- Numéroter les copies et les rendre dans le bon ordre.
- C'est perdre son temps que de recopier l'énoncé avant chaque réponse.
- Soigner la présentation. En particulier, il est recommandé aux candidats de mettre en évidence les résultats de chaque question (souligner ou encadrer).

Conclusion

L'attention des candidats est attirée sur le fait que les textes des sujets de mathématiques nécessitent une connaissance très précise des points fondamentaux du cours.

Sont ainsi valorisés

- L'apprentissage du cours et en particulier les démonstrations des points importants, les exercices et exemples de base.
- Les qualités de rigueur et de clarté d'exposition que l'on peut attendre d'un futur ingénieur.
- L'aptitude à savoir manipuler sa calculatrice (lorsque le sujet autorise son usage, ce qui ne sera pas toujours le cas).
- Le soin apporté à la présentation de son travail.

Un candidat de niveau moyen et qui a travaillé doit pouvoir obtenir la moyenne au moins.

3/ Remarques détaillées par question

Premier exercice

Le mieux ici était de passer en coordonnées polaires (avec $r \geq 0$) et alors (si on n'oublie pas la valeur absolue du jacobien) on arrive très vite au résultat : $\pi \ln 2$.
Un certain nombre de candidats ont voulu faire un balayage vertical ce qui a engendré des calculs très compliqués !

Deuxième exercice

1. Question bien traitée.

2. On attend un argument de continuité pour prouver que $\ker \varphi = \{0\}$.
On rappelle que $\dim(A \times B) = \dim A + \dim B$
et non pas : $\dim(A \times B) = \dim A \times \dim B$!

3. Il fallait penser à poser $z = y'$ pour se ramener à une équation du premier ordre en z.

4. Une fois trouvé que les fonctions $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto x^4$ sont solutions, il suffisait d'indiquer, puisque dim $S^+ = 2$, que $S^+ = vect\left\{x \mapsto x^3, x \mapsto x^4\right\}$.

5. Une idée était, par exemple, de trouver une équation différentielle admettant deux solutions du type $x \mapsto x^\alpha$ avec deux valeurs de α négatives.

Problème

1. Principale erreur, l'utilisation de : $\sum_{k=0}^{n} B_{k-1}$.

2. On majore souvent $|S_n|$ par une suite qui converge pour en déduire, à tort, que la suite (S_n) converge.
   Certains démontrent le critère spécial des séries alternées sans appliquer le « résultat précédent ».
   D'autres utilisent que la suite (b_n) est bornée à la place de la suite (B_n).

3. Attention, la somme géométrique commence pour $k = 1$.
   Les candidats n'ont pas tous compris qu'il s'agissait ici d'utiliser une transformation d'Abel !

4. Question facile mais il ne fallait pas oublier le cas où $x = 2k\pi$.

5. Pour la convergence uniforme de la suite $(a_n F_n)$, il convient de préciser vers quelle fonction cette suite converge uniformément.
   Certains confondent convergence absolue et convergence normale d'une série de fonctions.
   On rencontre : $\|F_n(z)\|_\infty$ à la place de $\|F_n\|_\infty$ et aussi des inégalités avec des complexes !

6. Penser que la convergence uniforme sur tout segment inclus dans un intervalle I entraine la convergence uniforme sur tout l'intervalle I est une erreur fréquente.
   La question 6c est la plus rarement réussie du sujet.
   On rencontre des coefficients de Fourier qui ne convergent pas vers 0 !
   La formule de Parseval n'est pas correctement connue.

7. On s'y attendait : pour trop de candidats une série entière converge uniformément sur son disque ouvert de convergence alors que cette convergence uniforme est acquise sur tout compact inclus dans le disque ouvert de convergence.
   Par ailleurs, la série est une série entière de la variable complexe, il ne sert à rien de parler de l'intervalle $]-R, R[$ et encore moins d'utiliser des inégalités faisant intervenir des complexes.

8. a) Une technique de réponse intéressante est, ici, de mettre à défaut le théorème de la double limite afin de démontrer que la série entière ne converge pas uniformément sur $]-R, R[$.
   b) Représenter l'ensemble a fait fuir quelques candidats.
   c) Question assez bien traitée, sauf peut-être pour expliquer que l'ensemble est borné.
   d) Majorations abusives, là encore complexes…
   e) Question de conclusion bien traitée.