

F-MATHEMATIQUES II - filière PSI

I) Remarques générales :

Le problème posé à cette Épreuve portait sur la formule du triple produit de Jacobi. Ce produit a des applications dans de nombreuses preuves. Il permet de transformer des sommes infinies en produits infinis, ce qui en facilite la manipulation et permet des calculs plus aisés. Il a également des applications en arithmétique, comme le proposait le problème dans la partie III.

Ce sujet faisait intervenir des suites, des séries, des séries entières, de l'analyse classique et du dénombrement.

La plupart des questions de ce sujet portaient sur des mathématiques très classiques, et malgré cela, celles-ci n'ont pas vraiment inspiré la majorité des candidats. Les résultats ont été très décevants et il a fallu remonter les barèmes de façon importante. Beaucoup de questions élémentaires ont engendré chez les candidats des rédactions et des calculs inefficaces et très peu convaincants.

En ce qui concerne la présentation des copies, nous avons constaté un très grand nombre de copies très mal écrites, comportant de nombreuses ratures, dépourvues de rédaction, parfois sans phrase pour une question entière, uniquement avec des symboles mathématiques. La copie rendue par un candidat ne doit pas être le lieu de ses réflexions, de ses essais, de ses erreurs et de ses égarements. Le brouillon est fait pour cela. Certains candidats, pensant ainsi remplir un objectif d'efficacité, rédigent directement au propre. Ils ne se rendent même pas compte qu'en fait, ils rendent leur brouillon.

On voit dans de très nombreuses copies des fautes et des maladroites de débutant, précisément celles qui sont dénoncées par les professeurs pendant l'année scolaire. Le fait qu'elles se produisent de façon aussi massive à l'occasion du concours est inquiétant.

De nombreux résultats étaient donnés dans l'énoncé. Beaucoup de candidats ont alors été tentés de rédiger des simulacres de démonstrations, avec parfois des changements brusques d'expressions d'une ligne sur l'autre, ayant pour effet d'aboutir au résultat attendu, d'une façon un peu trop miraculeuse.

Trop de candidats veulent traiter toutes les questions, au détriment de la qualité des solutions.

II) Remarques particulières :

Voici maintenant quelques remarques spécifiques concernant les questions du problème :

Question 1: La récurrence est souvent non initialisée, ou initialisée avec un entier k au lieu de 1. Bien que la bonne démonstration soit simple, celle-ci est réussie dans moins d'une copie sur deux.

Question 2: La démonstration est absente ou fautive dans plus de trois copies sur quatre, alors que la question pouvait difficilement être plus simple. La suite proposée est décroissante et minorée par 0. Il suffisait d'appliquer le théorème de la limite monotone.

Question 3: Cette question a déstabilisé tous les candidats, alors qu'elle peut être traitée très simplement. Il suffisait de remarquer que si u est un nombre complexe, alors, on a la double inégalité :

$$1 - |u| \leq |1 + u| \leq 1 + |u|$$

On en déduisait alors, que le terme général de la série $\sum \ln(\rho_k)$ était encadré par les termes généraux de deux séries absolument convergentes.

Beaucoup de candidats ont écrit une démonstration fautive, qui n'était vraie que dans le cas où cette série est à termes positifs ou nuls. Toute la difficulté résultait du fait que z peut être complexe non réel. Quasiment aucun candidat n'a vu que le terme général de la série pouvait être négatif ou nul.

Question 4: Cette question n'est quasiment jamais réussie. Les candidats ont beaucoup de difficultés à calculer avec des nombres complexes.

Question 5: Cette question est souvent bâclée. Les candidats utilisent souvent dans leur démonstration le produit infini dont il faut montrer l'existence, ce qui est absurde sur le plan logique.

Question 6: Cette question est souvent abordée et quasiment jamais réussie. On pouvait utiliser avec profit la convexité de la fonction exponentielle.

Question 7: C'est une des questions les plus appréciées et les plus réussies. Toutefois, comme le résultat était donné dans l'énoncé, le correcteur attendait une solution rigoureuse et soignée. Il fallait en particulier bien expliquer la réindexation.

Question 8: Cette question est très peu réussie. Presque toujours, il n'y a que des affirmations non justifiées. Quand il y a des arguments, ceux concernant la continuité sont souvent mal justifiés et ceux concernant la convergence uniforme des séries entières sont souvent faux.

Question 9: Il y a très peu de copies où on invoque l'unicité de la décomposition de F comme somme de F_1 et de F_2 , ce qui était indispensable. En revanche, beaucoup de candidats invoquent l'unicité des coefficients d'une série entière, à propos de F , qui malheureusement, n'est pas une somme de série entière, mais d'une série de Laurent, notion qui ne figure pas au programme.

Question 10: Cette question est en général mal justifiée. Les candidats écrivent souvent: « posons $n = 2m, \dots$ », alors qu'il faut justifier que les fonctions a_{2m+1} sont nulles. Il fallait utiliser à bon escient l'égalité « $F(x, z) = F(x, -z)$ », et l'unicité prouvée à la question précédente.

Question 11: Ici, il faut encore invoquer l'unicité prouvée à la question 9.

Question 12: Le degré d'achèvement de la démonstration de cette question est souvent insuffisant. L'expression de $b_m(x)$ est souvent insuffisamment simplifiée. Autrement, certains candidats calculent $b_m(x)$ pour $m=0$ et $m=1$, et écrivent ensuite : « on verrait par récurrence que ... », ce qui ne constitue pas une démonstration.

Question 13: Cette question présente une analogie avec la question 6. Elle est souvent mal traitée. Les candidats manquent d'habitude pour certaines majorations classiques.

Question 14: La réponse est une conséquence immédiate de la question 13

Par la suite, on aborde des questions plus difficiles, dont les réponses étaient souvent données dans l'énoncé. La rigueur et l'honnêteté intellectuelle n'ont pas toujours été au rendez-vous.

Questions 15 et 16: Il y a beaucoup de simulacres de démonstrations.

Question 17: L'égalité proposée dans l'énoncé n'était pas évidente et demandait à être correctement justifiée.

Question 18: Il fallait penser à itérer la formule de la question 17 et faire un passage à la limite. On en déduisait alors la formule du triple produit.

Les questions 19 à 23 ont été peu abordées par les candidats, faute de temps. Certains ont tenté de les rédiger très rapidement, alors qu'elles demandaient beaucoup de soin.

III) Conseils aux candidats et conclusion :

Les notes obtenues sont étalées de 0 à 20. Malgré un barème généreux, la moyenne obtenue par les candidats est de 8,36 sur 20.

Les prestations des candidats sont globalement décevantes. L'énoncé est souvent insuffisamment lu et peu ou pas compris. Les raisonnements sont souvent flous, approximatifs, fantaisistes, parfois très lointains d'un raisonnement rigoureux. Les calculs sont souvent maladroits, compliqués, faux. Le cours est très souvent mal su et les candidats ont souvent peu d'esprit critique sur ce qu'ils écrivent.

Concluons sur une note optimiste en constatant que nous avons eu tout de même la satisfaction de corriger un certain nombre de très bonnes copies.

On ne saurait trop recommander aux candidats de lire le sujet en entier avant de commencer la résolution. Une vision globale plus claire peut donner de précieuses indications pour certaines questions.

Les candidats doivent bien connaître leur cours, qui comporte tous les outils qu'il faudra mettre en oeuvre pour rédiger une bonne solution. Ils doivent aussi maîtriser l'art du raisonnement et les techniques classiques de calcul.

Il faut avoir réfléchi complètement sur une question avant d'en commencer la rédaction, pour obtenir la clarté et la rigueur nécessaires. La confusion, l'ambiguïté, voire le manque d'honnêteté intellectuelle doivent être bannis.

Espérons que ces remarques pourront aider les futurs candidats à mieux se préparer aux épreuves des prochains concours.