RAPPORT SUR L'EPREUVE ECRITE 2013 DE MATHEMATIQUES 2 DE LA FILIERE PSI

1/ CONSIGNES GENERALES :

L'épreuve permettait aux candidats de faire l'état de leurs connaissances et de leur aptitude à raisonner sur plusieurs parties du programme, tant en algèbre linéaire et euclidienne qu'en analyse.
Les étudiants ont traité le problème dans l'ordre des parties. Certains candidats qui ont connu des difficultés avec les parties **II** et **III**, se sont agréablement rattrapés dans la partie **IV**. Ne pas oublier alors, dans les dernières questions de cette partie, d'initialiser les formules démontrées par récurrence.
De nombreuses questions étaient de simples applications du cours et, pour ne pas bloquer les candidats dans leur progression, un certain nombre de résultats étaient donnés, seule la justification était demandée. On attendait alors de l'étudiant qu'il donne des raisons précises conduisant au résultat.
La présentation est en général satisfaisante, à l'exception de certaines copies où :
- l'écriture est peu lisible (il n'est pas très astucieux d'écrire avec une couleur bleue pâle, pénible pour le correcteur) : l'utilisation d'un stylo de couleur noire intense est vivement conseillée ;
- la référence précise des questions (avec trois numéros, par exemple **II.1.2**) n'est pas indiquée ;
- le blanc correcteur est utilisé de façon abusive : il n'est pas facile de lire une réponse qui a été écrite par-dessus du blanc correcteur lorsque le quadrillage de la page et les restes de ce qui a été recouvert se mélangent à la réponse.

On rappelle que la présentation est un élément important dans l'appréciation de la copie.
Comme toujours, il est conseillé de bien lire l'énoncé et de répondre aux questions telles qu'elles sont posées.
Les candidats ayant traité tout le problème sont rares. Si la partie **IV** est abordée, c'est très souvent parce qu'une partie précédente (souvent la partie **III**, parfois la partie **II**) a été peu traitée.
Dans une épreuve de Mathématiques, il est quand même conseillé de faire preuve d'un maximum de rigueur. En particulier, il faut éviter de : diviser par un réel sans savoir s'il peut être nul ; écrire a < b avec a et b nombres complexes ; donner un résultat sans justifications ; …
Dans une bonne partie des copies, les candidats ne font pas preuve d'une bonne maîtrise des objets manipulés : vecteurs, scalaires, matrices, normes,... ce qui les mène à des preuves fausses. En particulier, l'application qA n'est pas linéaire (la norme non plus par ailleurs) et le produit matriciel n'est pas commutatif.

2/ REMARQUES SPECIFIQUES :

Les candidats ont pour l'essentiel traité les parties **I** et **II** et quelques questions de la partie **III**. La partie **IV** a été très peu abordée dans sa globalité et c'est un tort, car il y avait dans les dernières questions du sujet des points faciles à gagner. Certains s'en sont d'ailleurs aperçus.
Le niveau faible de certains candidats transparaît souvent dans les questions qu'ils choisissent de traiter. Ainsi, ils auront tendance à privilégier les questions de calcul sur des exemples comme **I.1.3**, **I.5.1** ou **III.1** au détriment des questions qui demandent du raisonnement.
De nombreux candidats font virtuellement n'importe quoi avec l'algèbre matricielle. Ainsi, il n'est pas rare de voir des raisonnements du type ${}^t xAx = 0$, or $x \neq 0$, donc je simplifie par x, donc A = 0 !
De même, la confusion entre réels, vecteurs et matrices est fréquente. C'est ainsi qu'on dit que qA (x) = A, ou qu'on nous parle de qA(λ) pour λ valeur propre.

<u>Partie I</u>

I.1.1. Beaucoup de candidats citent « en vrac » toutes les propriétés qui leur passent par la tête. Il était simplement demandé de préciser qu'une fonction continue sur un compact (ici la boule unité de R_n) est bornée et atteint ses bornes.
On regrette que Ω_n soit parfois qualifié d'intervalle.
I.1.2. Cette question élémentaire n'est pas toujours correctement traitée.
Certaines rédactions de cette question laissent à croire que tout vecteur propre est de norme 1.

I.1.3. Il est assez étonnant de voir qu'un nombre non négligeable de candidats calculent (parfois avec des erreurs) le polynôme caractéristique de la matrice triangulaire A pour en déterminer les valeurs propres. Trop peu de candidats utilisent l'indication de l'énoncé.
I.2.1. Peu de candidats pensent à séparer les cas y = 0 et y non nul (ce vecteur est souvent normé sans précaution).
I.2.3. Tous ont compris qu'il fallait partir de la question précédente. Ensuite, ceux qui s'en sortent le mieux sont ceux qui l'appliquent pour y et z vecteurs de la base canonique. Mais, beaucoup traduisent les produits scalaires en termes de produits matriciels avec toutes sortes de manipulations frauduleuses. Si tout va bien, ils arrivent à ${}^tyAz + {}^tx^tAz = 0$ et là ils concluent que ${}^tA = -A$ sans pour autant préciser que c'est parce que cette relation est valable pour tous vecteurs y et z.
I.3. Quand on demande de prouver une équivalence, il s'agit de prouver une condition nécessaire <u>et</u> une condition suffisante (même si cette dernière est évidente).
Fort heureusement, certains ont bien vu que le caractère antisymétrique et symétrique de la matrice A entraînait sa nullité. Mais d'autres, ne voyant pas le lien avec la question du dessus, s'en tirent en invoquant le théorème spectral, avec le fait que toute valeur propre de A est nécessairement nulle. Dans ce cas, A est semblable à la matrice nulle d'où le résultat. Mais on trouve aussi un nombre invraisemblable d'horreurs. C'est là qu'on trouve ${}^tx^tAx = 0$ avec simplification par x. D'autres multiplient au préalable par x et ${}^t\mathrm{x}$ de part et d'autre pour obtenir $\mathrm{x}\,{}^txA\,{}^txx = 0$. Puis ils disent que $\mathrm{x}^t\mathrm{x} = \|\mathrm{x}\|^2 \neq 0$. Mais $\mathrm{x}^t\mathrm{x}$ est une matrice. On nous dit aussi que « les vecteurs de R_n sont inversibles » pour justifier la simplification. Bref, tout cela traduit une mauvaise maîtrise de l'algèbre matricielle qu'ils utilisent comme s'il s'agissait de scalaires.
I.4. Certains candidats ne semblent pas connaître la définition d'une norme. Avec cette connaissance, la question est simple.
I.5.1. Plusieurs candidats confondent la base canonique de R_n et la base (e_k).
Le nombre de candidats qui n'arrivent pas à trouver $qA(e_k) = \lambda_k$ est surprenant.
I.5.2. Cette question élémentaire n'est pas toujours bien traitée. Il suffisait de dire que la base (e_k) est une base orthonormée de vecteurs propres.
La norme de e_k reste souvent en facteur dans l'expression, et on trouve des choses comme $\sum_k \lambda_k$. Bien entendu, il y en a beaucoup qui donnent le résultat comme une évidence sans préciser que la base (e_k) est orthonormée. D'autres à l'inverse justifient la formule en invoquant très justement le théorème de Pythagore dans une base orthonormée. Mais de très nombreux candidats font des erreurs d'indice. C'est ainsi que l'on peut lire :

$$\|\mathrm{x}\|^2 = \left\langle \sum_{k=1}^{n} e'_k \middle| \sum_{k=1}^{n} e'_k \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \|e'_k\|^2$$

C'est certes vrai, mais bien parce que la base est orthonormée, ce qui fait que tous les produits croisés sont nuls. Mais là, les candidats ont plutôt été induits en erreur par l'utilisation du même indice k dans les deux sommes. C'est visible parce c'est seulement après qu'ils invoquent le côté orthonormé de la base pour dire que $\langle e_k | e_k \rangle = 1$. Enfin, dans le calcul de qA(x), il manque parfois le carré dans les $x'k$.

I.5.3. Certains candidats répètent les arguments donnés en **I.1.1** au lieu de démontrer le résultat d'une autre manière comme cela est demandé.
La majoration et la minoration de qA(x) sont très mal faites. Il y a d'abord ceux qui n'ont pas compris l'esprit de la question et invoquent l'argument de compacité de la question **I.1.1**.
I.5.4. La première partie de la question est rarement traitée correctement. L'inégalité sur le déterminant, produit des valeurs propres, est bien traitée en général.
Pour cette question et la précédente, beaucoup de candidats sont passés au-dessus de la distinction entre sup et max ou sup qA(x) et sup |qA(x)|.
I.5.5. Il est demandé de calculer det(A) et N(A), c'est-à-dire d'en donner une valeur exacte et non pas une valeur numérique approchée. 1,268 peut être considérée comme une valeur numérique approchée acceptable de N(A), mais 2 365,9864 est aussi une valeur approchée.

<u>**Partie II**</u>
II.1.1. et **II.1.2.** sont des trivialités. Mais, on peut quand même lire des choses étonnantes comme le vecteur $H_n(\mathrm{x})$ égal à une somme de réels !
II.1.3. Là encore, il s'agit d'une trivialité et pourtant certains candidats utilisent un théorème de convergence dominée pour justifier l'interversion de l'intégrale et de la somme finie !
II.1.4. L'équivalence demandée est justifiée rigoureusement seulement dans les meilleures copies.

Le correcteur espère comme justifications : positivité de l'intégrale ; l'intégrale d'une fonction continue et positive est nulle si, et seulement si, cette fonction est identiquement nulle ; une fonction polynômiale réelle est identiquement nulle si, et seulement si, elle a une infinité de racines.
Les conclusions sur les valeurs propres de H_n sont souvent très fantaisistes. Souvent, on oublie de dire qu'elles sont strictement positives. Pour certains, elles sont toutes nulles et pour d'autres, 0 n'est pas valeur propre !
II.2.1. Le recours au changement de variable t = exp(iθ) est fréquent !
II.2.2. Cette question délicate n'est que rarement traitée de façon satisfaisante, même si tous ceux qui l'abordent saisissent à peu près l'idée de la question. Mais, tous ne voient pas que l'intégrale est entre 0 et 1 alors que dans la question précédente, on a une intégrale entre -1 et 1. Certains prétendent pour s'en tirer que :

$$\int_0^1 \mathrm{Q}^2(\mathrm{t})\,\mathrm{dt} = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \mathrm{Q}^2(\mathrm{t})\mathrm{dt}$$

Mais il y a mieux. Certains appliquent la question précédente à Q au lieu de Q^2 et affirment ensuite que :

$$\int_0^1 \mathrm{Q}^2(\mathrm{t})\,\mathrm{dt} = \left(\int_{-1}^1 \mathrm{Q}(\mathrm{t})\mathrm{dt}\right)^2.$$

Ensuite, très peu de candidats prennent la peine de faire remarquer que $|q_n(\mathrm{x})| = q_n(\mathrm{x})$ compte tenu de $q_n(\mathrm{x}) \geq 0$ et très peu aussi montrent que l'inégalité est stricte pour $\mathrm{x} \neq 0$.

II.2.3. Cette question a été très rarement réussie. On lit un peu trop souvent que le carré d'une somme est inférieur à la somme des carrés !
II.3.1. Rarement traitée de façon satisfaisante. On s'attend à ce qu'un élève de mathématiques spéciales sache faire la nuance entre une inégalité stricte et une inégalité large (là encore il s'agit de rigueur minimale).
II.3.2. A ce stade du problème, certains candidats pensent que q_n est linéaire.
Le raisonnement par convexité de la question est très rarement expliqué avec précision.
II.3.3. Correctement traitée quand elle est abordée.

__Partie III__
III.1.1. Cette question a été bien réussie dans l'ensemble, même si le changement de variable n'est pas toujours justifié rigoureusement.
III.1.2. Correctement traitée quand elle est abordée.
III.2.1. Il fallait utiliser 0 < arctan(t) < t pour t > 0. De trop nombreux candidats utilisent arctan(t) < Pi/2 et prétendent aboutir au résultat de manière éhontée (par exemple, en disant que la fonction ln est bornée sur R^+).
III.2.2. Pour l'utilisation des théorèmes de comparaison en vue de justifier la convergence d'une intégrale, il est indispensable de préciser que les fonctions considérées sont à valeurs positives.
III.2.3. Les opérations sur les équivalents ne sont pas toujours correctement justifiées. Il est à rappeler qu'une majoration seule ne permet pas de justifier un équivalent et que réciproquement, un équivalent ne permet pas de justifier une majoration.
III.3.1. La comparaison de la somme partielle de la série harmonique à ln(n) n'est pas toujours correctement justifiée. A ce stade du problème, une figure peut suffire.
III.3.2. Dans cette question, la plupart des candidats donnent l'expression correcte de q_n(a) mais peu démontrent l'inégalité demandée.
III.3.3. Parmi les candidats qui traitent cette question, une majorité affirme que $N(H_n)$ tend vers l'infini.

__Partie IV__
Lorsqu'elle est abordée, cette partie est plutôt bien traitée par les meilleurs candidats.
La coquille sur la notation h_{ij} (pour a_{ij}) n'a pas perturbé les candidats qui ont sérieusement abordé cette partie.