1.2 E - MATHEMATIQUES II - filière PC

Présentation générale du problème: le sujet traitait du peu connu théorème de Harald Bohr, frère du célèbre Niels Bohr, amélioré par M. Riesz, I. Schur et F.W. Wiener.

Théorème :

Soit $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ *une série entière à coefficients complexes de rayon de convergence supérieur ou égal à* 1 *et vérifiant* : $\quad |\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n|\leq 1 \quad$ *pour tout* $|z|\leq 1$,

alors pour tout z *tel que* $|z|\leq \frac{1}{3}$, *on a* : $\quad \sum_{n=0}^{\infty}|a_n z^n|\leq 1.$

La première partie du problème consistait à prouver ce résultat à l'aide d'arguments élémentaires sur les séries de Fourier.
On traitait ensuite dans la deuxième partie, un cas particulier afin de montrer que le résultat de Bohr était optimal.
Pour l'essentiel il s'agissait de connaitre le développement en séries entières de $\frac{1}{1-z}$.
Enfin dans la troisième partie, on proposait de prouver une majoration de $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n z^n|$ en fonction de $|z|$ valable pour tout $|z|<1$.

Le jury signale deux erreurs grossières mais heureusement anodines pour les candidats:
- l'ensemble E n'est pas un espace vectoriel puisque **(H4)** n'est stable ni par la somme ni par multiplication par un scalaire;
- dans la question 21, il fallait préciser: $\forall\,|z|<1-\varepsilon$.

I) <u>REMARQUES GENERALES</u>

Le sujet a révélé l'absence totale de connaissances sur les séries de Fourier pour de très nombreux candidats qui ont complètement sombré sur cette épreuve. L'alternance entre des questions certes théoriques mais simples sur les coefficients de Fourier, des calculs et majorations élémentaires sur $\frac{z-\lambda}{1-\lambda z}$, puis enfin de l'algèbre linéaire, n'a pas toujours permis aux candidats de trouver leur terrain de prédilection.

Le jury souhaite pointer une nouvelle fois les problèmes irrationnels que semble soulever l'utilisation des nombres complexes. Par exemple comment expliquer que de très nombreux candidats dans la question 2) invoquent la multiplicativité de la fonction partie réelle ? Au moins, on ne pourra pas leurs dénier une certaine créativité.
Le jury n'en finit pas de s'étonner que les candidats s'entêtent à permuter sans scrupules intégrales et sommes infinies alors qu'ils devraient savoir que de telles acrobaties doivent systématiquement être justifiées. Rappelons que les mathématiques ne consistent pas à faire des manipulations formelles sans justification et que même des incantations vagues comme « car il y a convergence normale » , ne sont pas suffisantes pour obtenir les points afférents.
Les calculs élémentaires sur le développement en séries entières de $\frac{z-\lambda}{1-\lambda z}$ n'ont malheureusement pas permis aux plus faibles des candidats d'engranger des points. Donnons un conseil de bon sens : mal engagé sur le début du problème, il faut trouver des ressources morales pour rebondir sur d'autres thématiques dans le problème. Dans la deuxième partie, il s'agissait des séries entières et des questions d'algèbre linéaire dans la troisième partie.
Au final on peut dégager quatre types de copies:

• une majorité de candidats perdus dans les calculs des séries de Fourier ont rendu une copie presque vide;

• d'autres plus combatifs, sont parvenus à grappiller quelques points sur les séries entières et plus encore sur l'algèbre linéaire. Ils ont réussi à obtenir des notes au dessus de la moyenne générale;

• à peu près 20% des candidats ont su répondre aux premières questions sur les coefficients de Fourier avec souvent des petites erreurs de calcul. Bien lancés dans le problème, ils ont obtenus de bonnes notes, se répartissant selon leur rapidité et leurs compétences;

• notons enfin qu'une petite vingtaine de candidats ont traité, avec justesse et précision, toutes les questions du problème exceptée la dernière.

L'impression générale est celle d'un grand gâchis qui révèle certainement une maîtrise défaillante des séries de Fourier et une faiblesse profonde sur les nombres complexes. Visiblement les candidats semblaient plus à leur aise sur les questions d'algèbre linéaire.

II) REMARQUES PARTICULIERES

Première partie

Les coefficients étant complexes, il fallait utiliser les coefficients de Fourier exponentiels. De nombreux candidats ont préféré la variante avec les cosinus et sinus, perdant inutilement leur temps et leur l'énergie. Faut-il s'étonner encore si les nombres complexes font toujours autant de dégâts? Le jury a ainsi noté une forte corrélation entre l'aptitude à répondre aux premières questions et l'aisance des candidats dans les manipulations des majorations de la question 8): $|\frac{z-\lambda}{1-\lambda z}|\leq 1$.

• Il fallait invoquer un argument de convergence normale pour, soit calculer, soit dire que les coefficients de Fourier se lisent sur la série trigonométrique. Quand un tel argument est avancé, il l'est malheureusement sur le disque de convergence alors que la convergence normale attendue l'était pour $\theta \in [0,2\pi]$ et découlait directement de celle de $\sum_n a_n r^n$ pour $|r| \leq \lambda < 1$.

• La présence de $\overline{H_r}$ dans la question précédente n'a pas toujours suffit à orienter les candidats sur la formule $2\mathrm{R}e(z) = z + \bar{z}$.

• L'argument de convergence a été moins maltraité et les calculs plutôt bien menés.

• Le positivité du noyau et l'intérêt de cette propriété dans la majoration a été bien vue. En revanche, très peu de candidats ont pensé à utiliser la nullité de $\int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta$ et n'ont finalement qu'obtenu une majoration par $2\max_{-\pi\leq\theta\leq\pi} |\mathrm{R}e(h(re^{i\theta}))$ quand ils n'ont pas usé de magie noire pour faire disparaitre l'encombrant 2.

• En général, les candidats ont bien pensé à poser $|z| = r\tau$ mais peu ont essayé d'obtenir le cas limite.

Deuxième partie

Le jury a été surpris que cette partie plutôt concrète n'ait pas été plus réussie puisqu'au final il s'agissait à partir du développement en série entière de $\frac{1}{1-z}$ de mener des calculs relativement simples et courts.

• l'implication **(H4)** $\Rightarrow$ **(H3)** a été bien vue, en revanche personne n'a pensé au déphasage pour obtenir **(H2)**, i.e. multiplier tous les b_n par $e^{i\varphi_0}$.

• Le retour des nombres complexes : de nombreux candidats n'ont pas hésité à traiter z comme un nombre réel se sentant visiblement plus à l'aise avec les valeurs absolues qu'avec les normes.

• Finalement très peu de copies essaient de mener le calcul, la plupart s'arrêtent à l'expression des b_n. Il n'y avait pourtant aucune difficulté ni théorique ni pratique.

• Bien fait par ceux qui ont mené à son terme le calcul précédent.

Troisième partie

Les questions d'algèbre linéaire ont été une bouffée de points pour les candidats en déroute sur les séries de Fourier.

• Un invocation du théorème de Parseval ou un calcul direct via la convergence normale: plutôt réussie. Toutefois le jury a noté une tentation plus que coupable des candidats à égaler $\sum_{n=0}^{\infty} b_n r^n e^{in\theta} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \overline{c_n} r^n e^{-in\theta}$ avec $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \overline{c_n} r^{2n}$.

• Pas de problème particulier.

• La question a été largement maltraitée car dans l'ensemble les candidats n'ont pas pensé à utiliser la question 12.

• Quelques horreurs, D écrite comme un vecteur colonne, où avec des coefficients de la forme αz^n ; sinon une question plutôt réussie.

• A nouveau les candidats ont été à leur avantage sur ces questions.

• Une question facile que certains candidats sont allés heureusement dénicher.

• Il fallait penser à traiter les cas $r < \frac{1}{3}$ et $r \geq \frac{1}{3}$ ce qui a été très rarement noté.

• Comme le laisse penser l'écriture, il fallait utiliser astucieusement l'inégalité de Cauchy-Schwarz puis faire tendre ε vers 0. La question a été une des seules à ne pas être abordée.

II) <u>CONSEILS POUR LES FUTURS CANDIDATS</u>

Les exigences sur les séries de Fourier ne sont pas si élevées et notons que les questions y attenant sont très classiques et peu variées. Les candidats sont vivement encouragés à ne pas oublier cette partie du programme.

Plus généralement on ne saurait trop conseiller aux candidats de vérifier leurs acquis et leur dextérité dans la manipulation des nombres complexes.

Le jury ne saurait trop conseiller aux candidats de bien jouer le jeu des sujets d'analyse en justifiant les interversions intégrales/sommes infinies ou les variantes avec la dérivation, soit à l'aide de la convergence uniforme ou normale, soit à l'aide du théorème de convergence dominée.

Même désarçonné par le début du sujet, le candidat doit savoir rebondir sur une autre partie pour se remettre en selle. Il n'est d'ailleurs pas exclu que revigoré, il puisse revenir heureusement sur les premières questions.

Enfin, il est toujours vivement conseillé de soigner la présentation des copies en mettant en évidence les résultats voire les arguments essentiels de la preuve afin, non seulement de faciliter la lecture du correcteur, mais aussi de s'assurer que celui-ci le notera.