Mathématiques 2

Présentation du sujet

Le sujet proposé abordait quelques questions de calcul matriciel en dimension 2.

La notion de « cercle propre » (*eigencircle*, Englfield-Farr, 2006) vient de l'idée suivante. Dans l'équation $\det(A - \lambda I_2) = 0$ qui définit les valeurs propres réelles $\lambda \in \mathbb{R}$ d'une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on substitue à λ une matrice

$$\lambda = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

représentant le nombre complexe $x + iy$ (x et y réels). L'ensemble des solutions est un cercle du plan complexe qui se trouve caractériser A à un changement de base orthonormée directe près.

Pour aborder cette notion, la clé est la « décomposition orthogonale » (unique) de tout endomorphisme linéaire de $\mathbb{R}^2$ en somme d'une similitude directe et d'une similitude indirecte (voir question **III.E.3**), ce qui conduit à associer à tout élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ un couple de nombres complexes (z_+, z_-). Dans le plan complexe, le « cercle propre » de l'énoncé est alors de centre z_+ et de rayon $|z_-|$. La transposition des matrices correspond à l'opération $(z_+, z_-) \mapsto (\bar{z}_+, z_-)$; le changement de base par la rotation d'angle θ à l'opération $(z_+, z_-) \mapsto (z_+, e^{2i\theta} z_-)$.

L'énoncé proposait d'étudier aussi la réductibilité des matrices carrées réelles d'ordre 2 à l'aide de ce type de données.

Analyse globale des résultats

Les candidats ont paru assez déstabilisés par les questions demandant des raisonnements par condition nécessaire et suffisante. Le jury note que de nombreux candidats n'ont pas assez la culture de la « preuve », aussi succincte soit-elle. Rappelons que chaque assertion doit être justifiée — et que les correcteurs savent très bien distinguer un véritable argument d'une simple périphrase.

De même, les descriptions d'ensembles de matrices ou d'endomorphismes (classes de matrices obtenues par changements de base) posent de gros problèmes à nos candidats qui peinent à identifier le paramétrage de tel ou tel ensemble.

La longueur de l'énoncé a semblé désorienter certains candidats, qui oublient à chaque nouvelle question d'utiliser les résultats obtenus plus tôt.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux candidats

I.A.1 Question abordée par la plupart des copies. La justification complète de l'implication « seulement si » n'est que très rarement montrée.

I.A.2 Question déjà beaucoup moins abordée. Très peu de copies donnent un programme qui renverrait effectivement l'angle de la rotation $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (voir pourtant la question **III.B.3.c**).

I.A.3 La notion de morphisme de groupes, où l'un des groupes est noté multiplicativement, est parfois encore mal maitrisée. La proximité de l'espace vectoriel sous-jacent à la question a incité de nombreux candidats à tenter d'expliciter des matrices $R_{\lambda t+u}$ ou à tester si le noyau du morphisme proposé était réduit à la matrice nulle.

I.A.4 Cette question très facile donne lieu à des calculs et des explications parfois très longs. Rappelons que les correcteurs apprécient plus la concision que la redondance, sans parler du temps gagné pour aborder ensuite d'autres questions.

I.C.2 Ici beaucoup de copies recommencent un calcul banal de valeurs et espaces propres sans noter qu'ils peuvent appliquer la question **I.B.2**.

I.C.3 La question présente exactement la même difficulté que la question **I.A.1** si on voulait l'aborder sans utiliser ce qui précède. On devait se ramener à ce cas en multipliant A par K_2. Bien peu de copies contiennent cet argument.

II.A.2 Certains candidats ne comprennent pas la question posée qui concerne les éventuelles matrices en relation avec αI_n pour α *fixé*.

II.A.3 Ici de nombreuses copies se lancent dans de longs calculs risqués sans noter la commutativité du groupe des rotations déjà vue en **I.A.3**. Et même si le calcul est correct, de nombreux candidats ne savent pas en déduire la réponse demandée qui doit bien sûr supposer A fixée.

II.B.1 Cette question a été plutôt bien réussie par les candidats qui l'ont abordée. Preuve que les candidats savent identifier la géométrie d'un endomorphisme dans certains cas simples.

II.B.2 Certains candidats ont su utiliser la réciproque du théorème spectral. Notons qu'il ne suffit pas de montrer qu'*une* matrice de passage n'appartient pas à $SO(2)$ pour montrer qu'*aucune* ne le pourrait.

II.B.3 Beaucoup de calculs trop compliqués à ces trois questions. Signalons que réécrire $B = P^{-1}AP$ (P inconnue) comme $PB = AP$ simplifie beaucoup le problème. Pratiquement aucune copie ne semble vouloir utiliser l'idée contenue dans **I.B.2** et qui aurait permis de comparer les possibles bases où les matrices considérées diagonalisent, ce qui est pourtant très concret en dimension 2.

III.B.1 Beaucoup de candidats, cherchant à s'en remettre à des formules du cours, croient pouvoir déduire $\mathcal{CP}_A = \mathcal{CP}_{{}^tA}$ du fait que A et ${}^tA$ ont même déterminant, ou même polynôme caractéristique.

III.B.3.a Les candidats qui abordent cette question facile ne parlent que très rarement de similitudes.

III.C Reconnaissons que cette question est très difficile pour les candidats à l'aide des seules méthodes décrites auparavant. Même la partie directe n'a eu que très peu de démonstrations correctes.

III.D.1 Une majorité de dessins faux est à déplorer (position du cercle essentiellement), parfois alors même que l'équation de $\mathcal{CP}_A$ était correcte à la question **III.A.1**.

IV.A.1 Les candidats connaissent bien pour la plupart le théorème sur les endomorphismes dont le polynôme caractéristique est scindé à racines simples.

V.A.1 Question bien placée puisqu'au début d'une partie, elle a retenu l'attention d'un grand nombre de candidats. La notion d'hyperboloïde de révolution à une nappe parait relativement bien reconnue. Quelques bonnes représentations graphiques.

Conclusions

Le grand nombre de questions a paru inciter les candidats à passer très vite d'une question à l'autre à la recherche de questions faciles. Cela a nui à la qualité du traitement en provoquant de nombreuses fautes d'étourderie.

Le jury rappelle qu'il attend des progrès quant à la rédactions de preuves.

Par ailleurs, la volonté de calculer semble éloigner les candidats de toute considération géométrique (orthogonalité, norme, rotations). Ces considérations auraient bien sûr toute leur place dans cette seconde épreuve de mathématiques.

Terminons sur l'observation que la représentation en 3D d'un hyperboloïde parait maintenant plus familière que certaines propriétés du plan complexe.