



1/ CONSIGNES GÉNÉRALES :

Le sujet proposait l'étude et les limites de fonctions définies par des intégrales ou sommes de séries, ce qui permettait d'utiliser bon nombre de notions et résultats du programme d'analyse. A plusieurs endroits, il convenait de citer les résultats du cours et vérifier avec précision les hypothèses. Cela est souvent l'occasion d'apprécier les qualités du candidat ou au contraire de constater son manque de rigueur. Le sujet comportait de nombreuses questions accessibles, mais la deuxième partie (sur la convergence dominée) a posé beaucoup de problèmes aux candidats. Les questions qui ont rapporté le plus de points sont les questions de cours, la convergence ou continuité d'intégrales à paramètre. En général, les candidats connaissent les théorèmes, même s'ils mélangent parfois les différentes notions ou si la formulation est approximative. On peut être déçu chez certains du manque de technique pour étudier la convergence d'intégrales, ce qui laisse une mauvaise impression au correcteur dès le début de la copie. Notons aussi une progression plutôt inquiétante du nombre de candidats commettant de graves erreurs d'appréciation sur les limites usuelles, l'intégrabilité en particulier des fonctions de référence de Riemann et qui multiplient les imprécisions. Par exemple, on voit proliférer les arguments erronés : un produit de fonctions intégrables est intégrable, ou une fonction intégrable est bornée. Par ailleurs, la nécessité de bien vérifier toutes les hypothèses d'un théorème cité est indispensable.

La quasi-totalité des copies est bien présentée, même s'il reste encore quelques copies quasi illisibles ou mal présentées. Rappelons que la présentation, la rédaction, la précision interviennent dans l'évaluation. Signalons aux futurs candidats que la rigueur reste la clé de la réussite et qu'écrire n'importe quoi ne rapporte pas de points. Profitons-en pour redonner nos conseils :

- bien lire l'énoncé et répondre explicitement aux questions posées. Toute réponse à une question devrait se terminer par une réponse explicite, clairement identifiée (soulignée ou encadrée),

- rédiger les réponses, en explicitant les théorèmes ou arguments utilisés. Un simple alignement de résultats ou de calculs, même « non faux », ne suffit pas la plupart du temps à avoir les points de la question.

2/ REMARQUES SPÉCIFIQUES :

Passons aux remarques sur chacune des questions :

Partie I :

I-1.1 : C'est la première question et beaucoup de candidats montrent dès le début leur manque de rigueur. La continuité n'est pas toujours précisée ; confusion entre équivalents et développements limités, limites fausses en 0. Manque de rigueur sur le signe dans les dominations, de plus, la référence aux fonctions de Riemann n'est pas nette la plupart du temps. Notons la fréquente et classique erreur de majoration : $1 - \cos(t) \leq 1$ (au lieu de 2).

I-1.2 : Parfois des études et complications inutiles à la borne A de l'intégrale, alors que seul le comportement de la fonction en 0 était à préciser.

I-1.3 : Trop d'intégrations par parties avec des intégrales : le problème en 0 rarement considéré ou mal étudié. Dans nombre de copies, on n'utilise pas la bonne primitive de sinus (pourtant apparente dans le texte) ce qui conduit à introduire et manipuler sans en avoir conscience des termes divergents et ce, bien que cet exemple soit plutôt "classique".

I-2.1 : Plutôt bien traitée, parfois des vérifications inutiles avec quelques rares candidats qui n'ont pas compris ou ne connaissent pas le théorème et montrent juste la convergence à x fixé. La justification spécifique que L est bien définie fait perdre pas mal de temps, alors que le théorème (de continuité sous l'intégrale) bien appliqué garantit à la fois l'intervalle de définition et la continuité.

I-2.2 : Fréquemment, les candidats ne disent pas clairement que l'intégrande est de classe C^2 par rapport au paramètre (ils mentionnent directement les dérivées partielles) et oublient souvent de vérifier la domination sur la dérivée partielle première, seule la dérivée partielle seconde étant dans ces cas-là dominée. Les copies ne font pas apparaître assez clairement pourquoi on se limite d'abord à $[a, +\infty[$ avec $a > 0$. Le passage ensuite à $]0, +\infty[$, bien qu'habituel, est rarement convaincant. La plupart des candidats gagnerait à structurer leur réponse et encore plus à éviter de se disperser sur les intégrabilités autres que celles des fonctions de domination, qui elles ne sont pas souvent détaillées. Certaines copies utilisent le résultat de la question suivante (sur les fonctions bornées) pour obtenir les dominations, ce qui est recevable.

I-2.3 : Montrer que deux fonctions proposées sont bornées a gêné les candidats et les arguments donnés sont souvent incomplets ou faux (on majore par une fonction non bornée). Dans la majoration de $|x L(x)|$, les références aux inégalités fondamentales de l'intégration n'apparaissent pas assez clairement. Certains candidats tentent un passage à la limite sous l'intégrale mais sans aucune justification. Erreurs de raisonnement sur la limite de L ou L' en voulant raisonner par l'absurde : on lit « si L ne tend pas vers 0, alors L tend vers un réel l » ou « vers l'infini », sans penser que *a priori* elle pourrait ne pas avoir de limite !

I-2.4 : En dehors d'éventuelles erreurs de calcul, on trouve fréquemment la séparation de l'intégrale impropre (validée par le caractère C^2) en deux intégrales impropres dont on oublie souvent de préciser l'existence. Certains passent à la limite sur les intégrales sur un segment, avec une rédaction souvent maladroite : amalgame entre $L''(x)$ et l'intégrale partielle. Le calcul de L'' est quand même souvent mené à bien, certains ayant pourtant des difficultés pour préciser la partie réelle du nombre complexe obtenu.

I-2.5 : Le calcul de L' omet souvent qu'il y a, *a priori*, une constante d'intégration et le calcul de L peu traité ou faux. Au final, on a attribué très rarement tous les points de cette question.

I-3.1 : Oubli fréquent de préciser la continuité sur l'ouvert. Equivalents incorrects, comparaisons sans tenir compte du signe, certains feignent d'ignorer que $\ln(x) \leq 0$ pour x dans $]0,1[$.

I-3.2 : On rencontre fréquemment le prolongement par 0, sans tenir compte du cas $k = 0$. L'intégration par parties est souvent mal rédigée ou non mentionnée, l'étude en 0 peu détaillée.

I-3.3 : Souvent bien traitée lorsque les deux questions précédentes sont correctes. Néanmoins, l'intégration terme-à-terme n'est pas toujours bien justifiée, car on veut se référer à une série entière ou à une convergence normale. Quant au théorème approprié, la vérification de toutes les hypothèses n'est pas toujours faite.

Partie II :

II-1.1 : On demandait ici l'énoncé d'un des théorèmes essentiels du programme d'analyse, ce qui a conduit à bien des surprises. Finalement, cela n'est fait correctement que dans moins de la moitié des copies. Sinon, il y a

beaucoup d'imprécisions sur la régularité requise des fonctions et sur le mode de convergence de la suite de fonctions. Parfois, le candidat n'identifie tout simplement pas de quel résultat il s'agit.

II-1.2 : Résolutions quelquefois satisfaisantes, cependant la plupart des copies sont imprécises sur la gestion du cas $t = 1$ dans la convergence simple. Le plus souvent, on est incapable d'utiliser le théorème cité à la question précédente, en particulier pour la domination.

II-2-1 : La justification de l'existence d'une intégrale impropre pose problème dans la rédaction, même si les arguments importants sont cernés. Peu de candidats commencent par indiquer que la fonction est continue sur l'intervalle ouvert d'intégration. L'étude en 0, en majorité bien traitée, amène parfois à des arguments ou majorations fausses. L'étude en $+\infty$ est généralement plus satisfaisante, même si certains candidats veulent utiliser que la fonction tend vers 0 en $+\infty$.

II-2.2 : Il est décevant de constater que trop peu de candidats font un lien avec la question précédente (avec une majoration) et beaucoup recommencent un raisonnement qui d'ailleurs ne s'adapte pas au voisinage de 0. La continuité de la fonction n'est quasiment jamais évoquée, son signe non plus, ce qui est gênant pour conclure.

II-2.3 : Sur cette question et les suivantes, on a pu évaluer les différences entre les candidats. Les hypothèses, notamment de domination, doivent être vérifiées. Il est aussi curieux de voir des candidats rechercher, sans succès, une autre fonction dominante que celle donnée dans l'énoncé et qui pourrait convenir. Pour conclure sur l'équivalent, la non nullité de l'intégrale considérée est importante et en général cela est oublié.

II-2.4 : Beaucoup de rédactions approximatives sur cette question où les hypothèses du théorème de dérivation des intégrales à paramètre doivent être vérifiées.

II-2.5 : Trop peu de candidats comprennent la différence entre cette question et la précédente, on affirme souvent qu'elle se traite de la même manière.

II-3-1 : A nouveau, le changement de variable est rarement justifié avec la précision nécessaire et attendue.

II-3.2 : Application de la convergence dominée non vue ou traitée trop rapidement bien souvent.

II-4.1 : Le changement de variable et l'intégration par parties rarement justifiés. Pas mal d'erreurs de calcul. La primitive adéquate de sinus n'est pas toujours identifiée, produisant un résultat sans rapport avec la question posée ou un « raccord » rocambolesque.

II-4.2 : Quelques candidats pensent à justifier la convergence de l'intégrale, mais cela reste rare et souvent confus.

II-4.3 : La jonction entre les différentes limites très peu rencontrée.

Partie III

III-1.1 : Très peu de justifications, beaucoup d'erreurs sur F pour ceux qui ne se rendent pas compte du démarrage des indices à 1.

III-1.2 : Question normalement facile et en effet souvent traitée, mais liée à la question précédente.

III-2.1 : On a eu la malheureuse confirmation que la convergence normale des séries de fonctions est inconnue ou non comprise. Manque de rigueur fréquent autour de la notion de norme infinie et des notations afférentes. Recherches de la norme infinie par tableau de variation, sinon les majorations de la norme infinie sont mal ou non

justifiées. La référence à la série géométrique convergente de raison a est trop rare et les arguments du théorème utilisé sont souvent confus.

III-2.2 : La majoration demandée a très souvent posé des problèmes et son exploitation reste délicate, avec pas mal d'abus comme des velléités d'utiliser une convergence normale. Au final, peu de résultats complets pour justifier la limite cherchée.

III-3.1: Le changement de variable est trop rarement justifié et le caractère au moins C^1 bijectif de la fonction utilisée peu signalé ou vérifié. Sur quelques trop rares copies, il est bien annoncé comme stratégie pour démontrer la convergence. La plupart du temps, le candidat tente de justifier directement l'existence de $g(x)$ mais en tournant en fait autour du changement de variable sans le faire.

III-3.2 : L'invocation d'une « comparaison série-intégrale » n'est certes pas sans rapport avec la question, cependant, la décroissance de l'application composée est rarement bien justifiée et la positivité de la fonction f n'est quasiment jamais précisée. Certains candidats refont la démonstration avec plus ou moins de rigueur sur la monotonie, le rôle joué par x pris dans $]0, 1[$ est souvent oublié.

III-3.3 : Au moins, l'existence des intégrales impropres est justifiée. On rencontre très rarement une justification à peu près correcte de l'existence de $F(x)$ qui nécessite ici de faire appel aux séries à termes positifs, donc de repérer que f est bien à valeurs positives. La plupart du temps, on a le raisonnement abusif consistant à dire que $F(x)$ existe car les intégrales impropres existent, voire pas de raisonnement du tout.

III-3.4 : Les candidats ont oublié de lire le « avec soin » : c'est une question en général mal rédigée. On rencontre l'encadrement mais la limite du terme de gauche (grâce à un changement de variable) est rarement justifiée.

III-4.1 : Application souvent confuse du théorème de dérivation (classe C^1) sous le signe somme, notamment en ce qui concerne la démonstration des modes de convergence, avec à nouveau les difficultés sur la convergence normale. Erreurs de signe fréquentes.

III-4.2 : Le lien avec les questions précédentes n'est pas clairement établi.

III-4.3 : Rares propositions de méthode ou référence à ce qui précède, au mieux de vagues conjectures, mais peu exploitables en général. Question exceptionnellement traitée.