# Mathématiques 2

## Présentation du sujet

Le problème porte sur la décomposition polaire et diverses applications.

La partie I est consacrée à la décomposition polaire. D'abord l'existence et l'unicité de la décomposition polaire d'un élément de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sont établies. Par des arguments topologiques, on montre ensuite l'existence d'une telle décomposition pour une matrice réelle.

La deuxième partie traite deux applications. Dans la première, on montre que deux matrices réelles unitairement semblables sont orthogonalement semblables. Dans la seconde, il faut utiliser la décomposition polaire pour résoudre un système matriciel.

Dans la troisième partie, les valeurs propres et les vecteurs propres d'une matrice tridiagonale donnée sont étudiées (intervenant naturellement en analyse numérique).

Enfin, dans la quatrième partie, il faut déterminer le maximum de l'application qui à $M$ associe la trace de $AM$ sur le groupe orthogonal.

## Analyse globale des résultats

Ce texte, de longueur raisonnable, permet de couvrir largement le programme : matrice symétriques réelles et théorème spectral, algèbre linéaire et réduction, topologie dans les espaces de matrices, analyse asymptotique.

La première partie est assez facile et classique. Les correcteurs se sont donc particulièrement attachés à la qualité de la rédaction. Les trois parties suivantes ont été abordées par la majorité des candidats.

Le sujet a permis un bon étalement des notes. En valorisant le travail approfondi du cours et la maîtrise d'objets et de notions fondamentaux du programme de mathématiques, il a permis d'évaluer de manière satisfaisante les diverses qualités des candidats.

## Commentaires sur les réponses apportées

La question **I.A** est une reformulation du cours. Des démonstrations complètes étaient attendues. Beaucoup de candidats se sont contentés d'indications succinctes, ce qui n'était pas raisonnable à ce stade du sujet. Dans **I.B.1**, le caractère diagonalisable car autoadjoint de l'induit est souvent omis. La question **I.C** est en général bien traitée. La fin de la partie I est souvent abordée. On y relève beaucoup d'arguments sommaires voire faux (caractérisations des matrices symétriques positives et des matrices orthogonales uniquement à l'aide du déterminant par exemple). La continuité de la réciproque, dans **I.E**, n'est correctement traitée que par quelques candidats.

La question **II.A.1** est le plus souvent bien traitée. L'argument d'inversibilité faisant intervenir le déterminant est souvent vu. Cependant, la justification est parfois incomplète (caractère non nul du polynôme). La suite est en général correcte. Le début de **II.B** fait appel aux mêmes arguments que ceux de la partie I et est souvent bien traité. En revanche, la question **II.B.2.c**, délicate, n'est que rarement résolue.

La relation de récurrence de **III.A** est établie dans une grande majorité de copies. En revanche, l'obtention du terme général de la suite récurrente et la recherche des vecteurs propres de la matrice $A_p$ sont très discriminants.

Dans la question **IV.A**, le lien avec la représentation des formes linéaires est perçu de manière satisfaisante par d'assez nombreux candidats. D'autres exhibent une telle matrice en regardant l'action de $f$ sur la base canonique. Les questions **IV.B**, **IV.C.1** et **IV.C.2**, sont bien traitées quand elles sont abordées. En revanche, la fin de **IV.C** n'est menée à son terme que par une poignée de candidats.

## Conclusions

Une fois de plus, ce sujet montre qu'il est indispensable de maitriser les définitions, les démonstrations et les méthodes du cours. La rédaction et la présentation d'une copie de concours doivent être irréprochables. Les copies peu lisibles et mal présentées ont été systématiquement sanctionnées.