Rapport sur l'épreuve de Mathématiques 2, concours PSI

Le problème portait sur l'étude des matrices stochastiques positives (matrices vérifiant la propriété notée $\mathcal{ST} > 0$), plus précisément sur des propriétés spectrales de ces matrices. Les définitions de ces matrices, qui sont simples, étaient données et aucune connaissance spécifique sur ces matrices n'était demandée. Le sujet comportait deux parties indépendantes.

La première partie, calculatoire, conduisait à une caractérisation géométrique dans le plan complexe, d'une classe de matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant la propriété $\mathcal{ST} > 0$.
La deuxième partie était une étude, dans le cas général de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, des propriétés spectrales vérifiées par les matrices stochastiques positives.

Jusqu'au milieu de la deuxième partie, les candidats étaient guidés par l'énoncé et les résultats à démontrer étaient donnés.

De façon générale, les notions de valeur propre, de vecteur propre, de polynôme caractéristique sont maitrisées. En revanche, les inégalités, portant sur des nombres réels ou sur des modules de nombres complexes, sont hors de portée de beaucoup de candidats. Les étudiants ont mieux réussi la première partie que la seconde partie. Quelques étudiants ont traîté l'intégralité du problème.

La première partie se décomposait en trois questions. Tout d'abord en I.1, on demandait le dessin d'un triangle T et d'un disque D dans le plan complexe, suivis des équations cartésiennes des côtés du triangle. Puis on faisait caractériser l'intérieur du triangle T à l'aide d'inégalités. Cette question a en général été correctement traitée.

La question I.2 portait sur les valeurs propres d'une matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant la condition $\mathcal{ST} > 0$. On demandait de montrer que les valeurs propres de la matrice A appartenaient à l'intérieur du triangle T. La question était très détaillée et faisait intervenir la trace des matrices A et A^2, l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la caractérisation de l'intérieur du triangle T, obtenue dans la question précédente. La plupart des candidats ont traité cette question, même si les raisonnements sont parfois incomplets.

La question I.3 était la réciproque de la question précédente. Elle nécessitait des calculs faisant intervenir de la trigonométrie et des nombres complexes. Les expressions données des réels α, β et γ à l'aide d'une écriture comprenant des nombres complexes, sont souvent obtenues, de façon plus ou moins rigoureuse. Ces réels étant les coefficients d'une matrice A, pour montrer que cette matrice vérifiait la condition $\mathcal{ST} > 0$, il fallait en particulier montrer les inégalités $\alpha > 0, \beta > 0$ et $\gamma > 0$. Cette démonstration a contribué à séparer les étudiants. L'inégalité $\alpha > 0$ était simple à obtenir, les deux autres pouvaient s'en déduire en remarquant l'invariance du triangle T par rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$; certains candidats l'on vu.
La fin de la question était classique : recherche des valeurs propres d'une matrice simple J, expression $A = \mathcal{P}(J)$ où $\mathcal{P}$ est un polynôme à déterminer puis détermination des valeurs propres de A (qui étaient données). Peu de candidats sont arrivés à justifier ces dernières valeurs propres.

Dans la deuxième partie, on considérait une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant la condition $\mathcal{ST} > 0$.

Après la question simple II.1 consistant à montrer que 1 était valeur propre de A, la question II.2 traduit le manque de maîtrise des candidats sur les inégalités. Pour obtenir l'inégalité $|b_{k,k}| \leq \sum_{j \neq k} |b_{k,j}|$, il fallait partir de l'égalité $\sum b_{k,j}x_j = 0$, isoler $b_{k,k}x_k$ d'un côté de l'égalité, passer aux modules puis majorer par la somme des modules, majorer chaque $|b_{k,j}x_j|$ par $|b_{k,j}||x_k|$ et enfin préciser que $|x_k| > 0$ pour pouvoir diviser par ce réel.
Citons aussi la majoration du réel $|a_{k,k} - \lambda|$ par $1 - a_{k,k}$ qui se traduit par un encadrement de $a_{k,k} - \lambda$ alors que λ est complexe !
Signalons toutefois une belle démonstration de $|\lambda| \leq 1$ à partir de l'inégalité précédente, faisant intervenir l'inclusion de deux disques du plan complexe.
Enfin de l'expression $\lambda = e^{i\theta}$ et du résultat donné $\cos\theta = 1$, beaucoup d'étudiants n'arrivent pas à en déduire $\lambda = 1$.

Le but de la question II.3 était d'obtenir la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 1 de la matrice A.
La partie II.3.1, consistait à montrer que 1 était aussi valeur propre de la matrice ${}^tA$ avec même dimension pour les sous-espaces propres. C'est un raisonnement classique, qui n'a pas été fait par un nombre suffisant de candidats. Curieusement, certains cherchent à montrer, sans succès, que le vecteur propre U de A est aussi vecteur propre de ${}^tA$.
La partie II.3.2 est traitée avec plus ou moins de réussite. Il faut reconnaître qu'ajouter des inégalités pour montrer qu'on obtient une égalité peut surprendre !
Puis, les étudiants n'étant plus guidés dans II.3.3, très peu sont arrivés à conclure sur la dimension du sous-espace propre. Très peu également arrivent à justifier l'existence du vecteur Ω. En revanche, ceux qui ont abordé cette question justifient la dernière égalité à démontrer.
La dernière partie II.3.4 de cette question était à la portée de tous les étudiants. Il s'agissait de faire le bilan des propriétés des vecteurs propres et des sous-espaces propres des matrices A et ${}^tA$ qui avaient été démontrées dans les questions précédentes. Toutes ces propriétés étaient écrites dans l'énoncé. Bien peu y sont arrivés. On aurait en particulier souhaité lire que 1 était valeur propre des matrices A et ${}^tA$, que chacun des sous-espaces propres associés était de dimension 1 et engendré par un vecteur à composantes > 0, les vecteurs U et Ω. Ce sont ces vecteurs qui interviennent dans les deux dernières questions.

La question II.4 était plus classique et a permis aux étudiants de se rattraper. Mais, trop de candidats montrent que N est une norme en oubliant de vérifier une des quatre propriétés d'une norme. Puis, pour simplifier l'inégalité $|\lambda|N(X) \leq N(X)$ et en déduire $|\lambda| \leq 1$, il est nécessaire de préciser que $N(X) > 0$.

Dans la question II.5, les étudiants qui ont su reconnaître l'égalité $\sum a_{i,j}\omega_j = \omega_i$, souvent démontrée dans II.3.3, ont su montrer II.5.1 puis II.5.3 qui en découlent, à condition de préciser que l'égalité $\lambda\Phi(X) = \Phi(X)$ entraîne $\Phi(X) = 0$, puisque $\lambda \neq 1$.

En conclusion de ce rapport, on conseille aux candidats d'apporter beaucoup de soin au travail sur les inégalités. Ils montreront ainsi le sérieux de leur préparation et obtiendront la valorisation qu'ils méritent.