

Mathématiques 1

Présentation du sujet

L'objet du problème est de prouver un Théorème de Hardy-Littlewood sur les séries entières, via une méthode due à Karamata. Plus précisément il s'agit de prouver que toute série entière $(\sum a_n x^n)$ dont les coefficients a_n sont des réels positifs, de rayon de convergence 1 et équivalente à la fonction $\frac{1}{1-x}$ en 1, est telle que la suite (a_n) converge en moyenne vers 1.

La première partie du sujet consiste à démontrer la densité des fonctions polynomiales dans l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$. Ce théorème de Stone-Weierstrass figure au programme de PC et la preuve qui en est donnée ici par les polynômes de Bernstein est très accessible.

La seconde partie comporte trois temps. Elle commence par deux contre-exemples de séries entières qui éclairent l'importance de l'hypothèse concernant le signe de la suite. Enfin le théorème est prouvé à l'aide d'un encadrement utilisant la propriété démontrée partie I.

Analyse globale des résultats

Le sujet est de longueur raisonnable et a permis de bien discriminer les candidats, qui ont pu s'exprimer sur des difficultés progressives, certaines copies l'ont traité entièrement. Il comporte deux parties bien distinctes. La première est très proche du programme de première année et nécessite des qualités de rigueur, notamment dans les majorations. Les résultats de cette partie sont dans leur ensemble assez décevants car de nombreux candidats ont été déstabilisés dès le début du problème par des égalités liées au binôme de Newton et des majorations sur des sommes tronquées : ceci a permis de valoriser les étudiants rigoureux. La seconde partie utilise les résultats du cours d'analyse portant sur les séries entières. La notion même de série entière n'est pas vraiment assimilée par bon nombre de candidats qui pensent que le coefficient a_n de la série $(\sum a_n x^n)$ peut dépendre de x , ce qui entraîne automatiquement une disqualification pour les questions **II.A** et **II.B**. La partie **II.C** et **II.D** nécessite une bonne maîtrise de la définition d'un équivalent et d'une limite, dont la connaissance a été le facteur de réussite des bonnes copies. Quelques candidats ont traité le sujet correctement en entier, ce qui doit être souligné car c'est un exploit, mais de nombreuses copies parfois très copieuses présentent un tel manque de rigueur qu'il n'est possible de valoriser aucune réponse.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux candidats

Dans ce sujet de nombreuses questions donnaient le résultat à prouver. Certaines copies tentent de bernier le correcteur en s'arrangeant pour obtenir ce résultat contre vents et marées. Le correcteur repère systématiquement ce type de falsification, et bien entendu sanctionne ce comportement, mais surtout il aura pour la suite des raisonnements un regard beaucoup plus critique. L'honnêteté est donc bien entendue la règle numéro un pour les candidats.

L'argumentation est le fer de lance du candidat et doit avoir la taille requise. Par exemple, pour étudier la convergence de la série $(\sum n)$, la phrase « il est évident que la série diverge » est à proscrire, on argumentera en disant que le terme général ne tend pas vers 0. *A contrario* pour étudier $\|f\|_\infty$ lorsque $f(x) = x^2 - x$, une étude complète de la fonction avec tableau de variation et signe de la dérivée peut être avantageusement remplacée par une phrase : « la fonction f positive sur $[0, 1]$ atteint son maximum en $1/2$ ».

Les questions de majoration sont souvent l'occasion de fautes de raisonnement, ce fait est signalé chaque année. On peut signaler entre autres l'oubli des valeurs absolues, par exemple voici ce qu'on peut lire parfois à la question **I.C.3** : pour tout $x \in [0, 1]$, $B_n(f)(x) - f(x) \leq \frac{\delta}{2\sqrt{n}}$ donc $\|B_n(f) - f\|_\infty \leq \frac{\delta}{2\sqrt{n}}$. Au passage, on rappelle que la majoration d'une borne supérieure d'un sous-ensemble de \mathbb{R} ne peut se faire directement et doit obligatoirement passer par une majoration de chaque terme de ce sous-ensemble. On oublie de justifier que pour qu'une somme partielle soit majorée par la somme totale il faut un argument sur le signe de la somme des termes restants.

Partie I

I.A.1 Traité sur toutes les copies.

I.A.2-3 On dénombre au moins quatre démonstrations bien différentes de ces questions : l'utilisation de la formule $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ est sans doute la plus simple ; la dérivation de l'expression $(x + (1-x))^n$, variante plus compliquée de la dérivation par rapport à x de l'expression $(x+y)^n$; la démonstration par récurrence basée sur la formule de Pascal est la plus longue à rédiger. Certains bons candidats se sont trop attardés sur ces deux questions. D'autres ne pensent pas à préciser qu'ils réindiquent certaines sommes en cours de calcul, par exemple en précisant « on pose $k = p + 1$ » : c'est très déroutant pour le correcteur, qui se met parfois à douter de la sincérité de raisonnements trop laconiques qui débouchent sur le bon résultat.

I.A.4 En général bien traitée

I.B.1.a La notation $\sum_{k \in V}$ apparaît mal comprise sur de nombreuses copies et ceci transparait quand le candidat écrit : $\sum_{k \in V} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1$.

I.B.1.b Cette question a donné lieu à des démonstrations fantaisistes basées sur l'inégalité $x < x^2$. La bonne démarche consistait à prendre le problème à l'envers en utilisant **I.A.4**, ce qui a permis de valoriser les candidats méthodiques et rigoureux.

I.B.1.c On voit parfois apparaître ici une factorisation, bien inutile, du polynôme $1 + x(1-x)$ pour obtenir son maximum sur $[0, 1]$

I.B.2.a Les candidats, qui ont oublié la valeur absolue sur le produit scalaire, n'ont pas obtenu les points. Le produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^{n+1} n'est cité que dans une copie sur deux.

I.B.2.b Une question qui a permis de cerner les candidats astucieux et généralement n'est traitée que sur les très bonnes copies.

I.C 1-2 Souvent bien traitée.

I.C.3.a Les candidats qui ont effectué leur majoration directement sur la norme infinie n'ont pas obtenu les points de cette question. La valeur absolue disparaît de la définition « Lipschitzienne ».

I.C.3.b On attendait, au minimum, que l'on explique que l'inégalité des accroissements finis peut s'appliquer sur le **segment** $[0, 1]$ puisque la fonction f y étant de classe C^1 , sa fonction dérivée est **continue** donc **bornée** sur cet intervalle.

I.C.3.c La démonstration complète de l'extension aux fonctions continues et de classe C^1 par morceaux de la propriété démontrée au b) était semble-t-il hors de portée de la majorité des

candidats, ou nécessitait un soin que les conditions du concours ne permettaient pas à ceux qui avaient compris le problème : ont été prises en compte les réponses cohérentes.

I.C.4 « On pose $r = \frac{c}{\sqrt{n}}$ » n'est pas la réponse attendue car ce n'est pas n qui est donné ici ! On commence à voir dans la réponse à cette question les candidats qui maîtrisent la notion de limite.

II.A.1 Cette question a donné lieu à des réponses très diverses. Plus du tiers des candidats proposent $b_n = x^n$, ayant constaté que $\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$. La décomposition en éléments simples ou le produit de Cauchy sont parfois utilisés, ce qui d'ailleurs évite le piège précédent. On trouve aussi dans cette partie l'éternelle erreur qui consiste à changer d'indice : « je pose $p = 2n$ » sans se soucier des nombres impairs qui n'ont pas d'antécédent.

II.A.2 On constate ici que de très nombreux candidats ne maîtrisent pas la notion d'équivalent. L'erreur la plus répandue consiste à dire que $f(x) = \frac{1}{1-x^2} \underset{x=1}{\sim} \frac{1}{(1-x)(1+x)} \underset{x=1}{\sim} \frac{1}{1-x}$. Les raisonnements que l'on applique aux « o » sont valables pour les « ~ ». Ce type d'erreur se voit d'ailleurs même dans de bonnes copies.

II.B.1 Les formules toutes prêtes pour développer $\frac{1}{(1-x)^a}$ sont finalement pénalisantes car elles obligent à réfléchir à une simplification des factorielles, travail qui n'est souvent pas finalisé : il est plus simple ici d'appliquer une dérivée. Trop de candidats ne précisent pas les conditions d'utilisation des formules sur les séries entières : addition, dérivation, produit.

II.B.2 On retrouve dans cette question les erreurs signalées au **II.A.1**. La méthode du produit de Cauchy est celle qui apparaît le plus souvent (ne pas oublier de citer les conditions d'application), mais concernant ψ , ce n'est clairement pas la meilleure car elle nécessite de simplifier la somme $\sum_{k=0}^n (-1)^k k$. On trouve également, bien que ce ne soit pas explicitement au programme, une décomposition en éléments simples.

II.B.3-4 Seuls les candidats soigneux arrivent à bout de ces questions.

Le sujet change ensuite de registre et teste la capacité des candidats à rédiger proprement des raisonnements de majoration.

II.C.1 Il faut justifier les minoration, en particulier $\sum_{k=0}^n a_k x^k \geq \sum_{k=0}^n a_k x^n$ mérite une explication.

D'ailleurs certaines copies écrivent $\sum_{k=0}^n a_k x^k = A_n x^n$.

II.C.2 Les candidats qui se ramènent à $(1 - e^{-1/n})f(e^{-1/n}) \rightarrow 1$ s'en sortent bien avec la définition d'une limite, mais rares sont ceux qui aboutissent en restant sur la définition de l'équivalent car ils confondent souvent les deux notions. Par exemple on lit : « pour $\varepsilon = 1/(1 - e^{-1/n})$, on a le résultat demandé en utilisant l'inégalité $|f(e^{-1/n}) - 1/(1 - e^{-1/n})| \leq \varepsilon$ ». D'ailleurs, la majoration demandée est très souvent considérée comme évidente à partir de $f(x) \underset{x=1}{\sim} \frac{1}{1-x}$.

II.C.3 Pour une suite, être majorée ne signifie pas que son terme général soit majoré par une autre suite, or c'est une réponse très répandue dans les copies. De plus, la plupart des candidats conscients du problème ont considéré implicitement qu'une suite majorée par une suite convergente est bornée, il aurait été utile de signaler au moins cette évidence.

II.D.1.a La réponse la plus simple passait par le calcul du produit de Cauchy $f(x)_{\frac{1}{1-x}}$ car elle évite de montrer que la série $\sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k$ converge sur $] -1, 1[$. Cette question a donné lieu à des raccourcis malhonnêtes.

II.D.1.b-c De nombreux candidats qui sont arrivés dans cette partie du problème, indépendante du reste, se sont enlisés dans les arguments de majoration pourtant très simples ici. On attend bien entendu un argument sur la monotonie de la suite (A_k) . On trouve aussi des copies où le résultat de la question apparaît miraculeusement en cours de majoration.

II.D.2.a-b Pour la première inégalité, on retrouve les préjugés sur les équivalents cités plus haut. Pour la seconde, plusieurs méthodes sont exploitées dont une inégalité de convexité pour la fonction e^x .

II.D.2.c-d Le piège du $N(1 - e^{-\lambda/N}) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty$ se referme facilement, surtout en fin d'épreuve, mais c'est tout de même une erreur inadmissible à ce niveau !

Le sujet à partir de cet endroit monte une marche dans la difficulté et s'adresse aux très bons candidats. Le grappillage n'a que très peu fonctionné.

II.E.1 Les réponses qui donnent, sans le simplifier, le résultat en fonction de coefficients a et b d'une droite, et cela même si ces coefficients ont été obtenus correctement, n'ont pas été pris en compte ou seulement partiellement. L'expression de l'intégrale comme une aire de triangle a permis un gain de temps intéressant. À noter que de nombreux candidats considèrent que la fonction affine a pour formule $g(t) = t$.

II.E.2-6 Ces questions ont été correctement traitées sur quelques très bonnes copies : c'est un plaisir de voir que certains candidats allient facilité de calcul et très bonne intuition, même si il faut ici reconnaître que le texte guidait bien.

Conclusions

Ce sujet s'est avéré très classant. Il valorise plus une bonne compréhension de la définition des objets utilisés que la connaissance des techniques étudiées en PC. C'est par exemple le cas pour la notion de série entière qui est mal assimilée par de nombreux candidats, ainsi que la définition d'un équivalent. Nous en profitons donc pour rappeler aux futurs candidats que pour faire de bonnes mathématiques, l'effort de préparation doit se porter avant tout sur le cadrage des définitions.