

# Mathématiques 2

## Présentation du sujet

Le problème porte sur les suites récurrentes linéaires à coefficients constants (abrégativement SRL) et les matrices de Hankel.

La partie I est principalement consacrée à la détermination de la structure de l'espace des SRL vérifiant une relation donnée. Le lemme de décomposition des noyaux permet de se ramener au cas où le polynôme caractéristique de la récurrence n'a qu'une racine complexe. Dans cette situation, un calcul explicite permet de conclure. L'étude générale est amenée par quelques exemples.

La partie II a pour objet le lien entre SRL et matrices de Hankel. Le polynôme minimal d'une SRL  $y$  est relié aux rangs des matrices de Hankel associées.

La partie III est consacrée au début de l'étude de la théorie spectrale inverse des matrices de Hankel réelles. Une telle matrice est symétrique, donc diagonalisable. On peut se demander à quelle condition un  $n$ -uplet de réels est la liste des valeurs propres (avec multiplicités) d'au moins une matrice réelle de taille  $n$ . Le but de la partie est l'obtention de conditions suffisantes pour qu'il en soit ainsi.

## Analyse globale des résultats

Ce texte, d'une longueur raisonnable, était de nature entièrement algébrique. Il demandait une bonne compréhension de la notion d'idéal, du cours d'algèbre linéaire dans sa généralité, en particulier du lemme de décomposition des noyaux. Le théorème spectral était également sollicité. Il était essentiel, dans les questions de nature théorique, de correctement typer les objets : les correcteurs ont par exemple été surpris par les confusions entre scalaires et suites, suites finies et polynômes...

De manière à équilibrer théorie et calculs, le sujet faisait une certaine part aux applications numériques. Ces dernières étaient facilitées par l'utilisation de la calculatrice. Beaucoup de candidats utilisent mal cette possibilité, dont l'impact sur le barème est pourtant clair.

Les meilleurs candidats ont bien traité la quasi-totalité du problème. Le sujet a permis un bon étalement des notes. La notation a accordé une grande place à la qualité des raisonnements et pénalisé le grappillage.

## Commentaires sur les réponses apportées

### Partie I

La question **I.A** a révélé chez certains candidats une certaine méconnaissance de la notion d'idéal (oubli de la structure de sous-groupe).

Les exemples de **I.B** ont été abordés de manière imprécise ou maladroite. Les réponses à **I.B.1** ont souvent consisté en une paraphrase sans valeur de la question ou en une affirmation correcte mais non justifiée.

Dans **I.C**, les résultats ont été beaucoup plus souvent énoncés que prouvés : la dimension de l'espace des solutions d'une récurrence linéaire et la détermination de l'espace des solutions dans le cas où le polynôme de la récurrence est un monôme méritaient une vraie justification. La question **I.C.3.b**, plus délicate, a été traitée par un certain nombre de très bons candidats.

En **I.D**, beaucoup ont oublié de vérifier l'hypothèse du lemme de décomposition des noyaux.

## Partie II

La question **II.A.1**, simple, a souvent été traitée incomplètement. En **II.A.2**, on relève beaucoup de raisonnements très lourds là où quelques lignes suffisaient.

En **II.B.1**, la justification de la dimension du noyau est souvent absente ; de plus, peu de candidats montrent que l'on peut imposer la dernière composante égale à 1.

La sous-partie **II.C** était dévolue à l'étude d'un exemple. La syntaxe du code demandé en **II.C.1** est souvent fantaisiste, tandis que les questions suivantes sont entachées de fautes de calcul et de négligences.

## Partie III

La question **III.A.1**, très simple, a été généralement bien traitée. Certains candidats se sont cependant embarqués dans une preuve non demandée du théorème spectral. En **III.A.2**, le rôle de l'hypothèse faite sur l'entier  $n$  n'a que rarement été perçu.

Les calculs de **III.B** ont souvent été abordés. Les questions nécessitant des changements d'indices ont révélé des lacunes surprenantes dans l'organisation des calculs. En revanche, l'inégalité de Cauchy-Schwarz est souvent utilisée à bon escient. Enfin, les correcteurs ont noté d'assez nombreuses tentatives d'escroquerie en **III.B.4** : la copie se devait de faire apparaître le calcul de la norme de  $w$ .

Les sous-parties **III.C** et **III.D** n'ont été abordées significativement que par peu de candidats.

## Conclusions

Le problème permettait aux candidats de montrer leurs qualités de rigueur et leur aptitude à mener correctement des calculs simples. Une partie conséquente des copies laisse percevoir une compréhension tout à fait honorable de l'algèbre linéaire. En revanche, la qualité de la rédaction est trop souvent médiocre. Outre les problèmes de typage signalés plus haut, les correcteurs ont noté une certaine incapacité à conclure une réponse de manière claire et synthétique, l'oubli fréquent de réciproques, et, plus généralement, le manque de précision dans les justifications.

Terminons en mentionnant que les remarques formelles mentionnées dans le rapport 2011 restent valables : les copies peu lisibles et/ou mal présentées sont systématiquement sanctionnées.