Mathématiques 1

Présentation du sujet

Un des objectifs de ce problème était de faire travailler les candidats sur le produit de convolution et la transformée de Fourier.

La première partie définissait le produit de convolution et examinait ses principales propriétés. La fin de cette partie utilisait cet outil pour, avec des unités approchées, retrouver une démonstration d'un théorème de Weierstrass.

La deuxième partie définissait la transformation de Fourier et faisait prouver la formule d'inversion de cette transformation.

La troisième partie, enfin, était l'occasion de faire dialoguer les deux notions de convolution et de codimension dans l'espace vectoriel des fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$.

Analyse globale des résultats

Alors qu'ils avaient rencontré la notion de transformée de Fourier dans un autre concours, quelques jours auparavant, les candidats n'ont pas dû s'ennuyer pour au moins deux raisons : la longueur du sujet et l'approche différente de la démonstration de l'inversion de Fourier. Se sont-ils régalés ? Évidemment pas tous, malheureusement.

Avant tout, confessons quelques légères erreurs d'énoncé.

- La définition de la norme infinie sur les fonctions continues et bornées qui a pu gêner certains candidats en **I.A.1** alors que la continuité de $f * g$ n'est demandée qu'en **I.C.1**.
- L'énoncé parlait en **I.A.1** de trois cas alors qu'il n'en propose que deux.
- En **I.D**, δ_n doit être continue.

Ces erreurs n'ont en réalité pas beaucoup gêné les candidats. Un bonus a cependant été donné aux étudiants rigoureux qui ont su rétablir les hypothèses manquantes.

Mais entrons dans le détail des principales fautes commises.

Commentaires sur les réponses apportées

I.A.1 Nous avons été surpris de constater que pour étudier l'intégrabilité aussi bien dans le a) que dans le b), de nombreux candidats, non seulement oubliaient la continuité de l'intégrande, mais ils considéraient $\int_{-a}^{a} |f(t)g(x-t)|dt$ pour $a > 0$. Ne parlons pas de ceux qui écrivent pour $a, b \in \mathbb{C}$, $ab \leqslant \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$.

I.A.2 Nous avons apprécié ceux qui, tout au long de leur copie, ont justifié les changements de variable avec un argument de bijection de classe $\mathcal{C}^1$ ou d'application affine.

I.A.3 a été l'occasion d'affirmations gratuites, d'erreurs ridicules…

I.B.3 Si certains candidats ont bien vu le lien avec **I.A.1.b**, d'autres ont parlé du théorème de Cauchy-Schwarz (en gratifiant Schwarz d'un « t » pour l'écrire de façon impropre Schwartz) sur $L^2(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(f,g) \mapsto \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)g(t)dt$, le pire, en prétendant donner une démonstration !

I.B.5 Nous aurions aimé voir des candidats considérer une fonction ψ_n définie par

$$\psi_n = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leqslant n \\ 0 & \text{si } |x| \geqslant n+1 \end{cases}$$

continue affine par morceaux et examiner $f_n = f\psi_n$. Au lieu de cela, nous avons assisté à l'intervention d'une fonction f_n définie par la formule

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |x| \leqslant n \\ 0 & \text{si } |x| > n \end{cases}$$

qui était, aux dires des candidats, continue à support compact.

I.C.1.a C'est le théorème connu de 999 sur 1000 candidats.

I.C.1.b Question souvent résolue avec $\varepsilon > 0$ mais avec l'oubli de la distinction du cas où la fonction f est nulle.

I.C.2 Nous rappelons à tous, la nécessité d'un raisonnement par récurrence, compte tenu du programme.

I.C.3.a Le théorème de « convergence normale » semble inconnu de plus de 80 candidats sur 100. Il y a confusion avec le théorème de Dirichlet ou avec un autre...

I.D.1 et **2** nécessitaient une grande technicité que nous avons appréciée chez un certain nombre de candidats bien préparés.

I.D.3 Très bien traitée dans son intégralité par 2 candidats sur 1000. La plupart des candidats n'ont pas réussi à prouver a). Le comportement de λ_n en a arrêté plus d'un. Signalons que, soit on écrit

$$\lambda_n = 2\int_0^1 (1-t^2)^n dt \geqslant 2\int_0^1 (1-t)^n dt = \frac{2}{n+1}$$

soit la connaissance des intégrales de Wallis ou de Stirling conduit à

$$\lambda_n \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{n}}$$

I.D.4 Presque aucun candidat n'a pensé à utiliser $f = h_n$ pour prouver la non existence de la fonction g.

II.A fut une occasion d'utiliser le théorème déjà rencontré en I.C.1.a. Les candidats sérieux ont bien traité cette question.

II.B.1 nécessitait la connaissance du théorème de Fubini sur l'intégrale double sur $I \times I'$ lorsque I et I' sont deux intervalles de $\mathbb{R}$. Nous avons regretté de pas avoir demandé de rappeler l'énoncé du théorème. Pour de très nombreux candidats, écrire : « d'après Fubini » suffit à justifier les calculs les plus hasardeux et les moins justifiés.

II.B.2 Un petit nombre de candidats a donné le bon contre exemple suivant : f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, paire, continue affine par morceaux et telle que $f(n) = n$, $f(n - 1/n^3) = f(1 + 1/n^3) = 0$ est telle que $f * f$ n'est pas définie sur $\mathbb{Z}$ alors que f est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$.

II.C.1 À notre grand étonnement, très peu de candidats, ont un résultat correct à cette question. Ceci a mis brutalement fin à leurs ambitions pour la fin de II.C.

II.C.2 Une question classique dont les réponses sont émaillées d'énormes bêtises du genre $1/x^2$ est intégrable en $\pm\infty$; on peut prolonger φ en 0 ; pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) \leqslant 1/x^2$; etc.

II.D La pseudo-justification évoquée en **II.C.1** est encore utilisée sans retenue.

La partie **III**, difficile, a été peu abordée.

La question **III.A** fut souvent mal traitée, car les candidats n'ont pas pris en compte le fait que $L^1(\mathbb{R})$ était un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Peut-être aurions nous dû rappeler la définition de la codimension.

Conseils aux candidats

Terminons par quelques conseils. Pour réussir les épreuves de mathématiques du concours Centrale-Supélec, il est d'abord indispensable de connaitre le cours, de lire le rapport du concours, et d'exercer sa sagacité sur des problèmes des années antérieures. Il est important de s'entrainer à rédiger de façon claire et concise, en citant avec précision les théorèmes employés. Sans que cela soit forcément suffisant, il est évidemment nécessaire de faire la différence entre une condition nécessaire et une condition suffisante.

Conclusions

En conclusion, cette épreuve, quoique longue et difficile, aura permis de départager les candidats sur des questions qui sont au cœur du programme d'analyse de la filière.