

## ÉPREUVE ÉCRITE DE MATHÉMATIQUES 2

---

### Thème

L'exercice, très court, avait pour objet la mise en œuvre des propriétés élémentaires des congruences modulo 11.

Le problème faisait étudier la diagonalisabilité et les vecteurs propres d'un endomorphisme de l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients réels.

### Observations générales

Les questions étaient de difficulté très progressive avec de nombreuses questions faciles. Même s'ils ne les ont pas toutes traitées, la plupart des candidats sont arrivés au bout du sujet car les quatre parties du problème étaient indépendantes.

En général, les copies sont bien présentées. Il faut cependant insister sur le fait que faire ressortir clairement la numérotation des questions, ainsi que les résultats, facilite nettement la lecture d'une copie et que cela ne peut que favoriser son auteur. Les copies peu lisibles ou relevant du brouillon ont été systématiquement sanctionnées.

Les candidats qui connaissaient bien le cours (notamment les conditions de diagonalisabilité) et les techniques élémentaires de calcul pouvaient facilement obtenir une note bien supérieure à 10.

Ce sujet a permis de bien classer les candidats, la moyenne de 12,07 est très convenable et les notes sont bien étalées (écart-type de 3,67).

### Remarques détaillées par question

#### Exercice

Il a été assez bien traité par les candidats qui l'ont abordé.

Certains candidats ont pensé que le petit théorème de Fermat permettait de répondre à la question 1 et ont donné  $p = 10$  comme réponse sans plus de réflexion.

La question 2 pouvait se résoudre avec un raisonnement par récurrence mais un calcul direct était plus rapide à condition de ne pas faire des disjonctions de cas inutiles.

#### Problème

1. Question facile et bien traitée. Cependant, certains candidats étourdis oublient de vérifier que  $A$  appartient au noyau de  $\varphi_A$ .

2. La question était facile à résoudre à condition de bien voir que la matrice demandée était d'ordre 4.
3. Question réservée aux candidats qui avaient trouvé la matrice de la question 2. Ceux qui ont des difficultés pour calculer les déterminants devraient au moins pouvoir utiliser une calculatrice.
4. De nombreux candidats ont fourni des démonstrations trop imprécises voire fausses. Il était certainement plus sûr de démontrer les deux implications séparément. Beaucoup pensent qu'une matrice est diagonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé.  
On a souvent vu que le polynôme  $X^2(X^2 - \alpha)$  n'a que des racines simples.
5. Une erreur fréquente a été d'affirmer qu'une matrice est diagonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé à racine simple.
- 6.
- (a) Calcul facile. De rares erreurs de signe.
  - (b) Il ne fallait pas oublier de préciser que  $B_{i,j} \neq 0$ .
  - (c) De nombreux candidats ont justifié la diagonalisabilité de  $\varphi_A$  par le fait que les  $\lambda_i - \lambda_j$  donnaient  $n^2$  valeurs propres distinctes ce qui n'a aucune raison d'être. D'autres pensent qu'il suffit de trouver  $n^2$  vecteurs propres distincts sans se préoccuper de savoir s'ils forment une base de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
- 7.
- (a) i. Question facile mais les réponses proposées ne sont pas toujours claires.
  - ii. Beaucoup de candidats concluent que  $\lambda$  est une valeur propre de  ${}^tA$  à partir de l'égalité  ${}^tX {}^tA = \lambda {}^tX$ .
  - iii. Comme en 6(b), il ne fallait pas oublier de vérifier que  $X {}^tY \neq 0$ .
  - (b) Une erreur de logique très fréquente : les candidats ont utilisé la question 7(a)iii sans se placer sous les hypothèses qui permettaient de conclure.
  - (c) Question facile.
  - (d) C'était certainement la question qui demandait le plus de recul de la part des candidats. En tout cas, ceux qui ont écrit que la famille  $(P_{i,j}X)_{i,j}$  est une base, auraient mieux fait de réfléchir un minimum en se demandant dans quel espace ils travaillaient.
8. C'est une question classique. Néanmoins, le caractère générateur de la famille a été souvent mal démontré.
9. Question facile et bien traitée en général.
- 10.
- (a) Les candidats ont bien vu la démonstration en général. La différence s'est faite au niveau de la rédaction.
  - (b) Pour démontrer l'égalité des deux endomorphismes, il fallait montrer qu'ils coïncidaient sur une base et pas seulement, comme on l'a trop souvent vu, sur le seul vecteur  $y$ .
  - (c) Question ne posant pas de difficulté.

**11.**

- (a) Une des deux implications a été plus souvent démontrée que l'autre.
- (b) C'est presque une question de cours.
- (c) Question a priori facile pour qui a bien vu la question (b) mais qui a cependant suscité de nombreuses réponses fausses.
- (d) Cette question était réservée aux candidats qui avaient trouvé le résultat de la question (c). Elle a été relativement peu traitée.

**12.** Question bien traitée en général.

**13.** Question facile et bien traitée.

Les questions **14** et **15** ont été assez peu traitées.

---