Mathématiques 1

Présentation du sujet

L'épreuve de Mathématiques I proposée cette année portait sur le cœur du programme d'analyse de la filière PSI : étude des intégrales à paramètres, étude de la convergence de séries numériques, calcul différentiel à plusieurs variables et recherche d'extrémums. Le thème général du problème était l'étude de la fonction Gamma d'Euler, dont la définition sur l'ensemble des réels strictement positifs était rappelée dans la partie I. Les parties II, III et V faisaient établir respectivement une variante affaiblie de la formule de Stirling, l'identité d'Euler pour la fonction Gamma et la formule donnant la dérivée logarithmique de la fonction Gamma. La partie VI faisait retrouver la distribution de Maxwell-Boltzmann de la mécanique statistique à partir d'un problème de maximisation de l'entropie à masse et énergie fixées.

Analyse globale des résultats

Jusqu'à la partie VI, il y a dans ce problème assez peu de groupes de questions systématiquement délaissés par les candidats, ce qui suggère que l'énoncé proposé était sans doute d'une longueur appropriée. En revanche, les réponses aux questions du VI montrent sans ambigüité qu'une majorité de candidats restent très mal à l'aise avec le calcul différentiel à plusieurs variables. Il est frappant de constater que presque aucun candidat n'a compris que l'intérêt de la question VI.A.2 était de ramener le problème initial d'extrémums liés en un problème de minimisation sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Commentaires sur les réponses apportées

Voici quelques remarques spécifiques sur les erreurs les plus fréquentes, dont les futurs candidats sont invités à tenir compte.

1. Trop de candidats n'ont pas compris qu'une fonction de la forme $t \mapsto t^x$ n'est **jamais** intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Trop de candidats croient que la dérivée de la fonction $x \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est $x \mapsto (x-1)t^{x-2}e^{-t}$.
3. Selon le programme, une intégration par parties doit impérativement être réalisée sur un segment − quitte à faire ensuite converger les bornes de l'intégrale vers des limites appropriées si besoin, cette dernière opération devant être soigneusement justifiée. Il fallait procéder ainsi dans les parties I à V de cet énoncé.
4. Selon le programme, pour démontrer la stricte positivité d'une intégrale, il faut utiliser une hypothèse de continuité sur l'intégrante.
5. Dans les questions portant sur la régularité des intégrales à paramètres, les candidats oublient trop souvent certaines hypothèses, et tout particulièrement celle de domination. Dans la partie IV, certains candidats cherchent à appliquer directement le théorème de dérivation sous le signe somme à l'intégrale définie en IV.C sans passer par la formule faisant intervenir la fonction H.
6. Dans les questions II.A et V.A, il peut-être astucieux, lors d'une intégration par parties, de choisir la fonction $t \mapsto t - C$ avec une constante C appropriée comme primitive de la fonction constante $t \mapsto 1$.

7. Dans la question III.A, trop de candidats confondent le fait que $f_n(t)$ converge vers 0 lorsque t tend vers n par valeurs inférieures à n fixé, avec le fait que $f_n(t)$ converge vers $t^{x-1}e^{-t}$ pour tout $t > 0$ lorsque n tend vers l'infini.

8. Dans de nombreuses questions (II.A-B-C, IV.B, V.B), les justifications apportées par certains candidats confinent parfois à la malhonnêteté intellectuelle. Par exemple, de nombreux candidats affirment au IV.B que « la primitive d'une fonction périodique est clairement une fonction périodique ».

9. Quelques candidats écrivent que l'ensemble Omega du VI.A est compact comme image réciproque d'un singleton par une application continue. Pour les candidats affirmant qu'un fermé borné est compact, rappelons qu'il faut préciser que cet énoncé ne vaut que dans un espace vectoriel normé de dimension finie.

10. Les candidats ont bien compris qu'il y a un lien entre extrémum local d'une fonction de plusieurs variables et annulation de ses dérivées partielles, mais oublient trop souvent de préciser que cet énoncé ne vaut que sur un ouvert.

Conclusions

Les correcteurs considèrent que la rédaction de la plupart des copies laisse beaucoup à désirer. Les futurs candidats doivent absolument faire des efforts particuliers en ce sens et apprendre à rédiger de manière à la fois concise et précise. En effet, un raisonnement obscur, où certains arguments sont omis, mal compris ou même seulement imprécis, est toujours dévalorisé de façon significative par la notation. En outre, une rédaction claire des questions ou étapes intermédiaires d'un raisonnement aide les candidats eux-mêmes à mieux en comprendre le déroulement. Les correcteurs encouragent donc les élèves de classes préparatoires à progresser dans cette direction. Ils rappellent en outre que la pratique des mathématiques est un exercice faisant appel à une grande exigence intellectuelle et que lorsqu'un correcteur doit apprécier une rédaction inutilement embrouillée, le doute ne profite jamais au candidat.